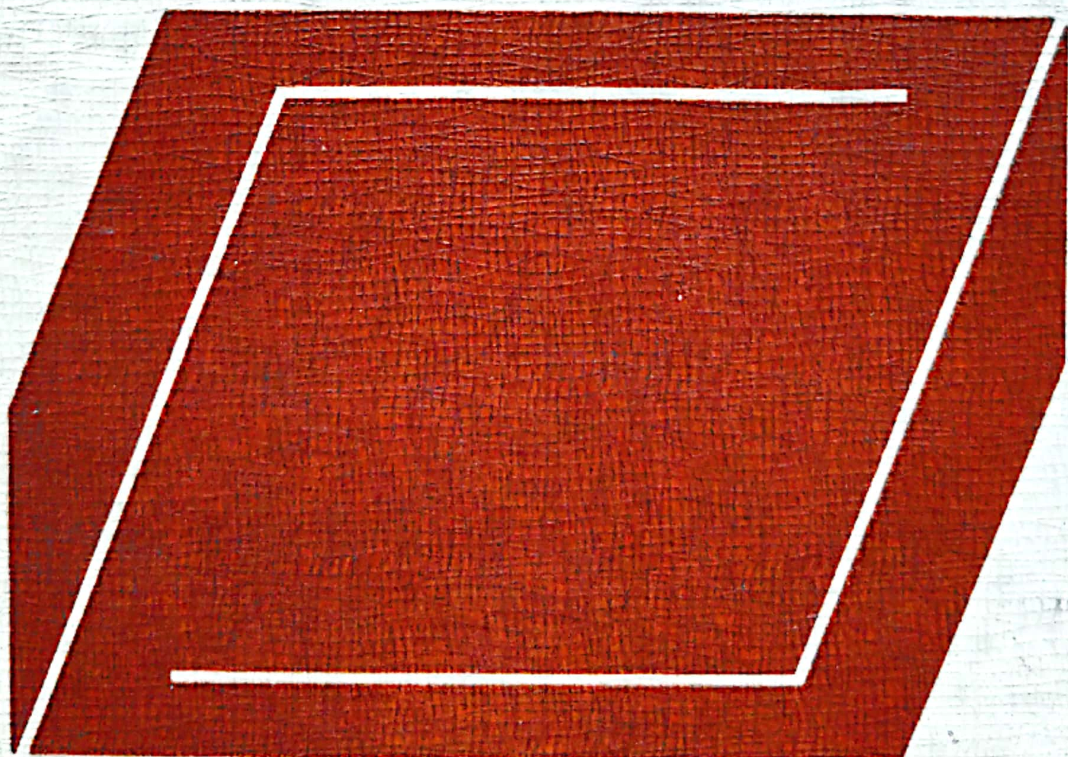
PROBLEME DE MATEMATICĂ TRADUSE DIN REVISTA SOVIETICĂ KVANT



PROBLEME DE MATEMATICĂ TRADUSE DIN REVISTA SOVIETICĂ KVANT

Volumul I

(problemele 1–200)

Selectarea şi traducerea: Lector univ. dr. Horea Banea



EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ — BUCUREŞTI, 1983

PREFAȚĂ

În anul 1970 a apărut revista sovietică Kvant (Cuanta) „revistă popular-științifică de fizică și matematică“ dar, și acest dar spune foarte mult, editată de Academia de Științe a U.R.S.S. și de Academia de Științe Pedagogice a U.R.S.S. Ea este adresată elevilor dornici de mai multă matematică și fizică decît le oferă programele școlare în vigoare.

Revista și-a atras repede simpatii și peste hotare și în multe numere ale Gazetei Matematice sau ale Revistei Matematice a elevilor din Timișoara s-au publicat probleme din Kvant.

Număr de număr, de la înființare, revista publică la rubrica sa „Culegere de probleme“ doar cîte 5 probleme care însă „sînt destul de grele și pentru analizarea unora dintre ele ar trebui scris cîte un articol destul de mare. Multe dintre ele dau prilejul abordării unor clase întregi de probleme, prezentării unor metode generale. Aceste prezentări sînt făcute uneori în paginile revistei dar adesea cititorii înșiși trebuie să se gîndească singuri cum să generalizeze rezolvarea, cum să o simplifice, unde se aplică fenomenul despre care este vorba în problemă ș.a.“. Problemele prezentate sînt foarte variate și pe lîngă probleme cu conținut tradițional de algebră sau geometrie, apar probleme cu tablouri cu numere sau culori aranjate în diferite feluri, cu lăcuste sau purici care sar de pe o dreaptă pe alta, cu cavaleri prieteni sau dușmani între ei și multe altele. În spatele acestei matematici făcute cu zîmbetul pe buze și cu creioane colorate în mînă găsim și autori celebri și teoreme foarte „serioase“ de teoria grafurilor, de combinatorică sau chiar de topologie.

Succesele echipei de elevi români la olimpiadele internaționale de matematică din ultimii ani s-au datorat, printre altele, și etapelor de pregătire în cantonamente prelungite. În aceste cantonamente, tot mai mulți elevi dotați pentru matematică au aflat (ceea ce unii știau deja) că dincolo de însușirea perfectă a unor algoritmi, pentru rezultate competitive la nivel internațional, mai trebuie ceva: o mare doză de perspicacitate, inventivitate și creativitate matematică. Ca orice altă calitate omenească și acestea se pot dezvolta prin antrenamente specifice. La acești elevi ne-am gîndit în primul moment cînd ne-am propus sarcina traducerii și prezentării problemelor din Kvant. Pe parcurs însă, ne-am dat seama că adresa acestor probleme este mult mai cuprinzătoare. Putem afirma că orice elev, chiar dintre aceia care nu au avut succese prea mari în învățarea matematicii, poate parcurge cu folos această culegere de largă cultură matematică, nu neapărat ca să afle răspunsul la tema pentru a doua zi, ci pentru ca să afle că există o matematică plăcută și utilă în imediata sa vecinătate. Să menționăm totuși orientativ că majoritatea problemelor sînt accesibile elevilor din treapta întîi de liceu, unele sînt accesibile elevilor din ultimele clase de gimnaziu și toate sînt accesibile oricărui om, indiferent de profesiunea sa, dacă are cunoștințe de matematică de nivel mediu.

Ni se pare însă că cei care pot utiliza culegerea cu cel mai mare folos sînt profesorii de matematică. Ei vor găsi în ea resurse nebănuite de a ilustra unele noțiuni și formule tradiționale în forme noi, vor găsi idei pentru teme la cercurile de elevi, sugestii pentru elaborarea unor probleme noi. De asemenea, este imposibil să nu se sesizeze atîtea aspecte metodice remarcabile ca: enunțuri de probleme pe cazuri particulare cu cerința de a le generaliza, utilizarea modelelor, folosirea culorii (mult mai sugestivă în unele situații decît notațiile cu indici), comentariile făcute în jurul rezolvărilor, anunțarea ideii înainte de prezentarea algoritmului ș.a.

În lucrarea pe care o prezentăm sînt date textele problemelor publicate în primii 8 ani de apariție a revistei, împreună cu rezolvările lor așa cum au fost date de redacție după 5—6 numere de la apariția enunțului. Nu ne-am propus să intervenim în fondul expunerilor și nici chiar în forma și notațiile utilizate care diferă uneori de cele folosite în manualele noastre. Acest lucru nu este însă un impediment pentru un cititor atent. Întrucît însă, rezolvările problemelor nu au fost date totdeauna la rubrica „Rezolvări" ci unele dintre ele au constituit subiectele unor articole mai ample care încadrau problema între altele asemănătoare, iar la altele au apărut reveniri succesive în urma scrisorilor unor cititori, uneori a trebuit să facem selecționări în text, să renunțăm (cu regret) la limbajul unor istorioare care arătau că încercările la care era supus personajul pozitiv din basme erau de natură... matematică.

Nu am considerat necesar să rearanjăm problemele după alte criterii lăsîndu-le în ordinea în care au apărut.

Dorim să subliniem încă o dată că nu este vorba de o carte de matematică „distractivă" (deși această calitate nu-i lipsește), ci de una de matematică „instructivă" (ceea ce este de fapt un pleonasm).

Comisia de matematică a Ministerului Educației și Învățămîntului a considerat că, abstracție făcînd de unele nepotriviri de amănunt dintre programele școlare românești și sovietice, cartea este foarte utilă elevilor și a încurajat proiectul traducerii.

Dr. HOREA BANEA

M 1. *În țara Anciuria, condusă de președintele Miraflores, s-a apropiat timpul noilor alegeri prezidențiale. În țară sînt 20 de milioane de alegători dintre care numai un procent (armata regulată a Anciuriei) îl susține pe Miraflores. Miraflores, natural, dorește să fie ales, dar pe de altă parte el vrea ca alegerile să pară democratice. Iată ce numește Miraflores „votare democratică": toți alegătorii sînt împărțiți în grupe egale, apoi fiecare dintre aceste grupe se împarte într-un număr oarecare de grupe egale, apoi acestea se împart din nou în grupe egale ș.a.m.d.; în cele mai mici grupe se alege reprezentantul grupei — electorul — apoi electorii aleg reprezentanții lor pentru votare în grupele mai mari ș.a.m.d.; în sfîrșit, reprezentanții celor mai mari grupe aleg președintele. Miraflores a împărțit alegătorii așa cum a vrut el și și-a instruit partizanii cum să voteze. Poate el organiza „alegerile democratice" astfel încît să fie ales președinte? (La egalitate de voturi cîștigă opoziția.)*

A XXXII-a olimpiadă matematică din Moscova

Răspuns. Da, poate.

Înainte de toate să vedem cum se poate ca în alegerile acestea „cu mai multe trepte" să cîștige candidatul pentru care votează minoritatea. (În multe țări capitaliste se votează după acest sistem.) Cel mai simplu exemplu care ilustrează astfel de situație este reprezentat în figura 1: aici sînt nouă alegători — patru din gruparea A (în desen, cerculeț negru) și cinci din gruparea B (cerculeț albastru) — care sînt împărțiți în trei grupe de cîte trei alegători, astfel încît în două grupe cîștigă cei din A și deci ca rezultat al acestor alegeri „în două trepte" va fi ales candidatul susținut de cei din A, deși numărul susținătorilor săi este numai 4/9 din numărul total al alegătorilor. (Nu e greu să se stabilească faptul că, la alegerile în două trepte cu un număr mai mare de alegători, procentul voturilor necesare pentru alegere poate fi chiar și mai mic, dar să fie mai mare de 25%). Este clar că la o alegere în trei trepte acest procent poate fi făcut și mai mic. De exemplu, dacă înlocuim în figura 1 pe fiecare alegător printr-o grupă de 100 de cetățeni, astfel încît în grupa de tip B toți sînt din B iar într-una de tip A 51 sînt din A și 49 din B, obținem un exemplu

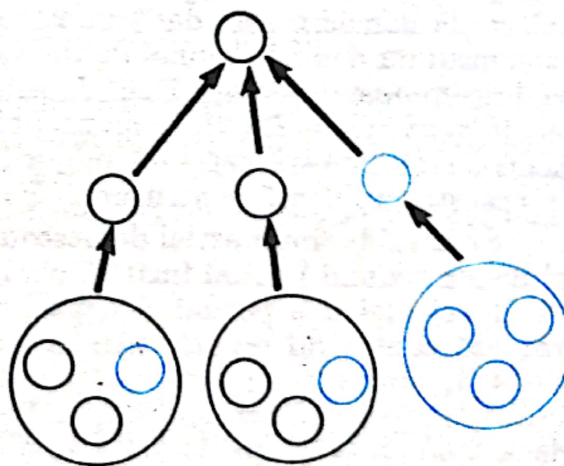


Fig. 1

de situaţie în care cei din A reprezintă numai $\frac{4}{9} \cdot \frac{51}{100} = \frac{17}{75}$ din numărul total de alegători şi totuşi ei înving.

După aceste consideraţii introductive să trecem la rezolvarea problemei.

Împărţim toţi alegătorii în 5 grupe de cîte 4 milioane, astfel încît două dintre grupe să fie formate în întregime din adversari ai lui Miraflores (vom numi aceste grupe de tip B, iar celelalte trei de tip A). Fiecare dintre aceste grupe de „rangul întîi“ le împărţim din nou în cinci grupe de rangul al doilea, astfel încît din cele cinci grupe care formează o grupă de tip A de rangul întîi trei să fie din A ş.a.m.d. aşa cum se vede în tablou

Rangul grupei r	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Numărul total al grupelor de rang r	5	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6	5^7	$2^4 \cdot 5^7$	$2^8 \cdot 5^7$
Cîte sînt din A	3	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^9	3^{11}
Cîţi oameni sînt într-o grupă de rang r	$4 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^5$	$16 \cdot 10^4$	$32 \cdot 10^3$	$64 \cdot 10^2$	1 280	256	16	1
În cîte grupe de rang $r+1$ se împarte fiecare grupă de rang r	5	5	5	5	5	5	16	16	—
Cîte subgrupe de tip A de rang $r+1$ are o grupă de tip A de rang r	3	3	3	3	3	3	9	9	—

Este clar că, în această împărţire, pentru victoria lui Miraflores e suficient ca pentru el să voteze

$$\frac{3^{11}}{2^8 \cdot 5^7} = \frac{177\,147}{20\,000\,000} < \frac{1}{100}$$

din totalul alegătorilor. Cum armata reprezintă 1% din totalul alegătorilor şi ea îl susţine pe Miraflores, el poate învinge.

Se poate încerca să se rezolve următoarea problemă mai generală: care este numărul minim de partizani ai lui Miraflores, astfel ca acesta să cîştige „alegerile democratice“, dacă numărul total de alegători este N? Desigur că răspunsul nu depinde numai de mărimea numărului N ci şi de modul în care se descompune în factori. Dacă N este prim, atunci alegătorii nu pot fi împărţiţi în grupe egale (în afară de cazul banal: N grupe de cîte un singur om) şi pentru victorie este necesară majoritatea simplă. Să încercăm să răspundem la această problemă pentru un N oarecare.

Să considerăm o astfel de descompunere a lui N în grupe (de rangul întîi, al doilea ş.a.m.d.) astfel încît să cîştige Miraflores şi numărul partizanilor săi să fie cel mai mic posibil. Evident că se poate considera că în grupele care votează contra lui nu este nici un partizan de al său şi că toate grupele de tip A de acelaşi rang sînt împărţite la fel. Vom folosi notaţia [...] — „partea întreagă“ ($[x]$ este cel mai mare întreg care nu-l depăşeşte pe x). Evident că dacă o anumită grupă de tip A este formată din k grupe de rangul următor, atunci printre acestea trebuie să fie cel puţin $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$ de tip A. Să presupunem

că fiecare grupă de rang $r(r = 1, 2, ..., m - 1)$ se descompune în k_r grupe de rangul următor, iar grupele de ultimul rang, al m-lea, sînt formate dintr-un singur om. Atunci pentru victoria grupei A, este necesar să fie cel puțin

$$\mathbf{R} = \left(\left[\frac{k_1}{2}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{k_2}{2}\right] + 1\right) \cdots \left(\left[\frac{k_m}{2}\right] + 1\right)$$

voturi pentru A. Problema noastră s-a redus la următoarea: să se descompună numărul dat N într-un produs de factori $k_1, k_2, ..., k_m$, astfel încît produsul $\mathbf{R}$ să fie minim.

Fie

$$N = k_1 k_2 \dots k_m$$

această descompunere. Așa cum va rezulta din lema următoare, se poate presupune că în această descompunere nu sînt factori k de forma $k = p \cdot q$ unde p și q sînt mai mari decît 2 (dacă există astfel de factori, se poate continua descompunerea fără a mări pe $\mathbf{R}$).

Lemă. *Avem*

$$\left(\left[\frac{p}{2}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{q}{2}\right] + 1\right) \leqslant \left[\frac{p \cdot q}{2}\right] + 1$$

pentru orice numere întregi p și q mai mari decît 2.

Demonstrație. Dacă p și q sînt ambele pare, inegalitatea se poate scrie astfel:

$$\left(\frac{p}{2} + 1\right)\left(\frac{q}{2} + 1\right) \leqslant \frac{pq}{2} + 1,$$

$$(p + 2)(q + 2) \leqslant 2pq + 4,$$

$$pq - 2q - 2p + 4 \geqslant 4, \quad (p - 2)(q - 2) \geqslant 4,$$

ceea ce este evident, dacă $p > 2$ și $q > 2$.
În cazul în care unul dintre numere, de exemplu p este par și celălalt q este impar, avem:

$$\left(\frac{p}{2} + 1\right)\left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{pq}{2} + 1,$$

$$(p + 2)(q + 1) \leqslant 2pq + 4,$$

$$pq - 2q - p + 2 \geqslant 0, \ (p - 2)(q - 1) \geqslant 0.$$

Cazul în care p și q sînt ambele impare se demonstrează analog. De aici rezultă că numerele impare N trebuie descompuse în factori primi „pînă la capăt". Rămîne să analizăm situația factorilor 2.

Putem considera că în descompunere nu sînt factori de forma $2q$, unde q este impar, întrucît

$$2\left(\left[\frac{q}{2}\right] + 1\right) = \left[\frac{2q}{2}\right] + 1.$$

Din lemă rezultă că dintre factorii pari este suficient să ne mărginim numai la 2, 4 și 8. Mai departe, este evident că $2 \cdot 2$ este mai nefavorabil decît 4, întrucît $\left(\left[\frac{2}{2}\right] + 1\right)^2 = 4 > \left[\frac{4}{2}\right] + 1 = 3$. Este convenabil ca $2 \cdot 4$ să-l înlo-

cuim cu 8, întrucît $2 \cdot 3 = 6 > 5$; $4 \cdot 4$ este mai bun decît $2 \cdot 8$ întrucît $3 \cdot 3 = 9$ şi $2 \cdot 5 = 10$; în sfîrşit $4 \cdot 4 \cdot 4$ este mai puţin convenabil decît $8 \cdot 8$, întrucît $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ şi $5 \cdot 5 = 25$, astfel încît mai mult de doi de 4 nu se pot păstra.

Astfel, răspunsul definitiv este: fie $N = 2^d p_1 \dots p_m$, unde $m \geqslant 0$, $d \geqslant 0$ sînt numere naturale, $p_1, \dots, p_m$ sînt numere prime impare. Notăm prin P produsul

$$\frac{p_1 + 1}{2} \dots \frac{p_m + 1}{2}.$$

Atunci, numărul minim de partizani ai lui Miraflores, suficient pentru victorie este

$R = 2P$, dacă $d = 1$ (adică dacă $N = 2p_1 \dots p_m$)

$R = 5^n P$, dacă $d = 3n (N = 8^n p_1 \dots p_m)$

$R = 3 \cdot 5^n P$, dacă $d = 3n + 2 (N = 4 \cdot 8^n p_1 \dots p_m)$

$R = 9 \cdot 5^n P$, dacă $d = 3n + 4 (N = 4^2 8^n p \dots p_m)$, n număr natural.

În particular, pentru $N = 20\,000\,000 = 2^8 \cdot 5^7 = 4 \cdot 8^2 \cdot 5^7$, obţinem $R = 3 \cdot 5^2 \cdot 3^7 = 164\,025$.

M 2. *Se dă o sferă de rază 1. Pe ea sînt aşezate circumferinţe congruente $\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_n$ de rază r ($n \geqslant 3$). Circumferinţa γ_0 este tangentă la toate circumferinţele $\gamma_1, \dots, \gamma_n$; în plus sînt tangente şi circumferinţele γ_1 şi γ_2; γ_2 şi γ_3; ...; γ_n şi γ_1. Pentru ce* n *este posibil acest lucru. Să se calculeze raza corespunzătoare r.*

A XVIII-a olimpiadă matematică din Cehoslovacia

R ă s p u n s: $n = 3, 4, 5$.

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}}.$$

Fiecărei circumferinţe de pe sferă i se poate pune în corespondenţă „centrul său de pe sferă" adică extremitatea razei sferei care trece prin centrul cercului (care, evident, nu se găseşte pe sferă). Acest punct va fi numit „centru" între ghilimele ca să subliniem că nu este vorba de centrul „obişnuit" (fig. 2, a). Să remarcăm că cercurile mari ale sferei nu au acest „centru", pentru că centrul lor este în centrul sferei. Cercurile despre care este vorba în problemă nu pot fi cercuri mari ale sferei căci acestea nu pot fi tangente între ele (ele se intersectează în puncte diametrale opuse).

Punctul de tangenţă dintre două circumferinţe situate pe sferă (vezi fig. 2, b) este situat în planul P care trece prin centrele circumferinţelor şi prin centrul sferei. Într-adevăr ambele circumferinţe sînt simetrice faţă de planul P şi dacă ele ar avea un punct comun de o parte a acestui plan atunci ar trebui să aibă şi un punct comun simetric cu primul, de partea cealaltă sau să nu aibă nici un punct comun. Dacă aceste circumferinţe au aceeaşi rază r, atunci distanţa dintre „centrele" lor este egală cu $2r$, pentru că în cercul mare obţinut prin intersecţia sferei cu planul P (fig. 2, c), diametrele circumferinţelor noastre şi segmentul care uneşte „centrele" lor subîntind arce congruente. Fie $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ „centrele" circumferinţelor $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Atunci $A_0A_1 = A_0A_2 = \dots = A_0A_n = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_nA_1 = 2r$, cu alte

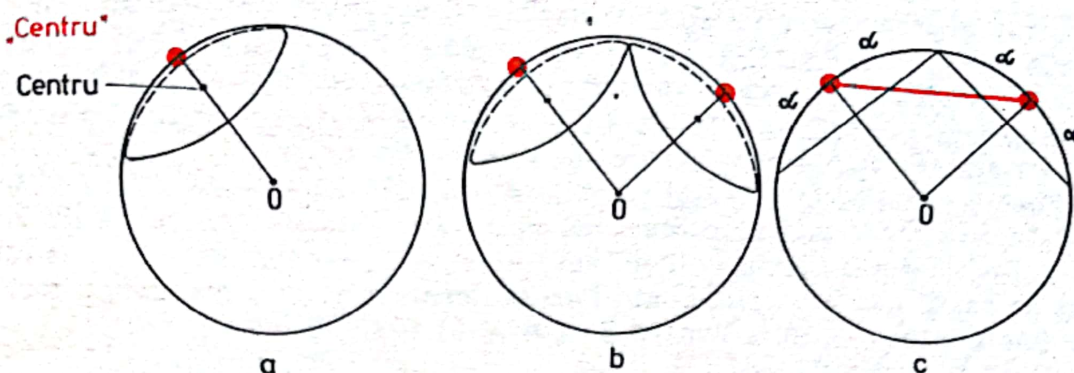


Fig. 2

cuvinte, A_0, A_1, A_2, ..., A_n sînt vîrfurile unei piramide cu n vîrfuri înscrisă în sfera de rază 1 şi astfel încît toate feţele sînt triunghiuri echilaterale cu laturile egale cu $2r$. Astfel este suficient să se construiască piramida care satisface aceste condiţii pentru ca să rezolvăm problema.

Întrucît suma unghiurilor plane ale unui unghi n-edru cu vîrful în A_0 este mai mică decît 360°:

$$n \cdot 60° = \sphericalangle A_1A_0A_2 + \sphericalangle A_2A_0A_3 + \ldots + \sphericalangle A_nA_0A_1 < 360°,$$

rezultă $n < 6$. Pentru $n = 3, 4, 5$ se construiesc uşor piramidele respective.

Fie O centrul sferei. Înălţimea piramidei h şi lungimea muchiei sale $2r$ se află din următoarele consideraţii: raza KA_1 a bazei piramidei este cateta în $\triangle A_0KA_1$ şi o latură a triunghiului isoscel A_1KA_2 unde $\sphericalangle A_1KA_2 = 2\pi/n$ (vezi fig. 3, a, b)

$$\sqrt{4r^2 - h^2} \sin\frac{\pi}{n} = r.$$

Din $\triangle A_0OA_1$ avem $r = h/2r$, de aici $h = 2r^2$, $r = \sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}}$.

Astfel, pentru $n = 3$, $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$, pentru $n = 4$, $r = \sqrt{\frac{1}{2}}$ şi pentru $n = 5$, $r = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$ (s-au folosit valorile corespunzătoare pentru sinusurile unghiurilor).

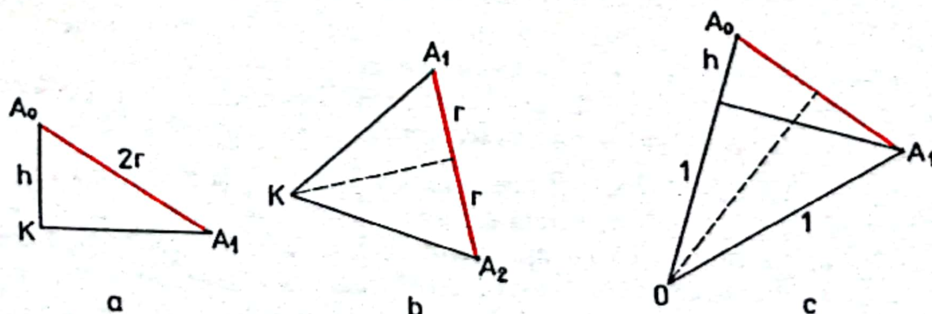


Fig. 3

Piramidele construite sînt strîns legate de poliedrele regulate care au toate fețele triunghiuri. Se știe că aceste poliedre sînt trei: tetraedrul, octaedrul și icosaedrul (fig. 4). Dacă la ultimile două tăiem cîte „un vîrf" (adică considerăm piramida determinată de toate muchiile care ajung în același vîrf) atunci obținem piramidele cerute de problemă.

Facem observația că condiția $n \geqslant 3$ din textul problemei poate fi înlocuită cu $n \geqslant 2$. Cele trei cercuri $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ au „centrele" în vîrfurile unui triunghi echilateral înscris într-un cerc mare al sferei (fig. 5). Calculul lui r, oricît ar părea de ciudat, se poate face cu formula de mai sus (care a fost de fapt demonstrată numai pentru $3 \leqslant n \leqslant 5$) și se obține

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

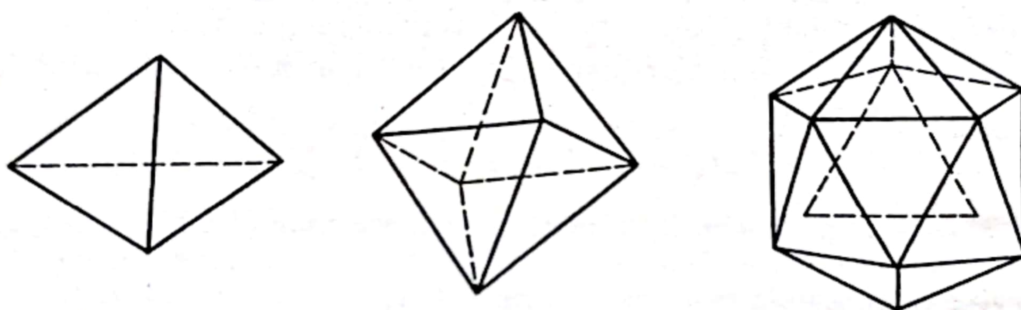


Fig. 4

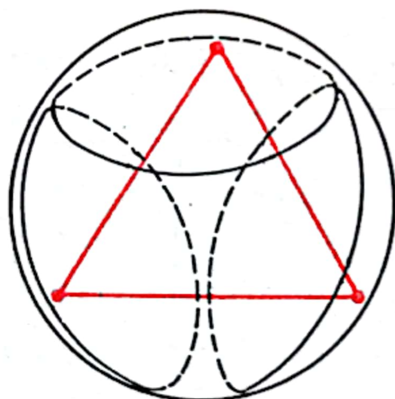


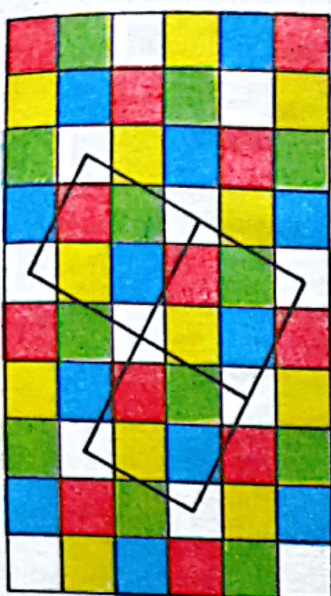
Fig. 5

M 3. *a) În figura 6 a, planul este acoperit cu pătrate de cinci culori. Centrele pătratelor de aceeași culoare sînt situate în vîrfurile unei rețele pătrate. Pentru ce număr de culori este posibilă o acoperire analoagă a planului?*

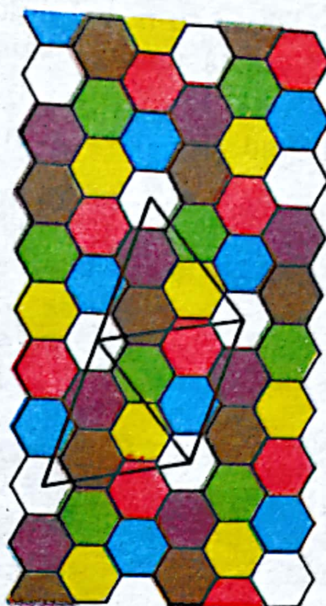
b) În figura 6 b, planul este acoperit cu hexagoane regulate de șapte culori, astfel încît centrele hexagoanelor de aceeași culoare sînt situate în vîrfurile unei rețele formate din triunghiuri echilaterale congruente. Pentru ce număr de culori este posibilă o acoperire analoagă a planului?

Observație. *La punctul a) al problemei se găsește ușor că numărul culorilor poate să fie egal cu 1 (toate pătratele colorate la fel) sau 2 (ca la tabla de șah). La punctul b) al problemei se găsește ușor că poate fi o culoare sau trei culori. Este de dorit să se dea răspunsul general. Sînt interesante însă și unele răspunsuri parțiale. Stabiliți, de exemplu, dacă la punctul b) este o soluție cu 13 culori.*

A. N. Kolmogorov



a



b

Fig. 6

În figura 7 dăm desenul trimis de elevul Serghei Eliseev (cl. a VI-a) care a colorat planul acoperit de hexagoane cu 13 culori.

Înainte de a da rezolvarea generală trebuie să facem o precizare relativ la textul problemei (pe care ne-a sesizat-o primul V. Gutenmaher din Moscova).

Începem cu punctul a). În text se cere ca centrele pătratelor de aceeaşi culoare să fie situate în vîrfurile unei reţele făcute din pătrate. În text nu s-a specificat că pătratele acestei reţele trebuie să fie congruente pentru culori diferite. În figura 8 centrele pătratelor de cele trei culori formează reţele de pătrate dar pentru pătratele roşii „pasul" (latura pătratului) reţelei este de lungime $\sqrt{2}$, iar pentru culorile alb şi galben este 2 şi, mai mult, ultimele două reţele sînt rotite faţă de prima. Dacă textul problemei se înţelege ad literam — şi la un examen scris sau la olimpiadă aşa şi trebuie făcut — atunci desenul din figura 8 satisface condiţiilor problemei. Dacă înţelegem astfel textul, atunci răspunsul la punctul a) este: pentru orice număr. Într-adevăr, din orice colorare cu n culori, dintre care una să zicem că este albă, se poate

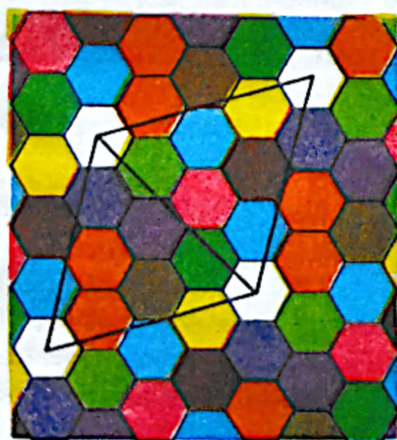


Fig. 7

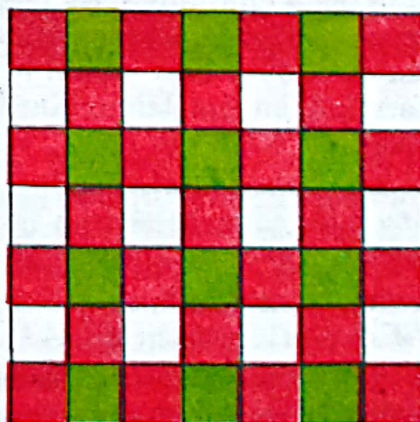


Fig. 8

obține o colorare cu n + 1 culori, dacă pătrățelele albe le colorăm „în ordinea de la șah" (adică una o lăsăm albă, alta vecină o colorăm cu a (n + 1) — a culoare ș.a.m.d.)

Înțelegînd astfel textul și punctul b) devine foarte simplu.

R ă s p u n s. Pentru orice număr de culori mai mare decît 2. Într-adevăr, o colorare cu două culori este imposibilă, întrucît dacă dintre cele trei hexagoane care se întîlnesc într-un punct, două au aceeași culoare, atunci toate hexagoanele trebuie să aibă aceeași culoare. Colorări cu 3 și 4 culori se găsesc ușor și mai departe nu e greu ca prin colorarea hexagoanelor albe în trei culori să mărim numărul total al culorilor cu 2, apoi iar cu 2 ș.a.m.d.

Desigur că în acest mod se pot obține multe colorări diferite. Dacă avem o colorare a planului, pe care să o notăm cu $\mathcal{A}$, cu k culori și punem în evidență o anumită culoare x și dacă avem o altă colorare a planului, fie aceasta $\mathcal{B}$ cu h culori, atunci se poate face „extinderea colorării $\mathcal{A}$ cu ajutorul lui $\mathcal{B}$" în felul următor. În colorarea $\mathcal{A}$ se păstrează toate culorile în afară de x și pătratele sau hexagoanele de culoare x (procedeul se referă la ambele cazuri) se recolorează în cele h culori și anume rețeaua pe care o formează ele se colorează după modelul lui $\mathcal{B}$ (considerînd pătrățelele izolate din rețeaua $\mathcal{A}$ de culoarea x ca pătrățele vecine din rețeaua $\mathcal{B}$). Se obține astfel o nouă colorare cu $k + h - 1$ culori. (În figura 8, în această terminologie este dată „extinderea colorării de tip șah cu o colorare de tip șah".)

Astfel că în această interpretare a textului rezolvarea este foarte simplă. Totuși autorul problemei a avut în vedere că rețelele formate din centrele respectivelor poligoane de aceeași culoare sînt la fel și se obțin unele din altele prin translații (așa cum se indică în figurile atașate textului problemei). Colorările respective, care respectă această cerință, le vom numi regulate. Întrucît rezolvarea ambelor puncte este asemănătoare vom considera deodată ambele cazuri.

R e z o l v a r e. I. Vom demonstra la început că dacă avem o astfel de colorare a planului, atunci numărul culorilor este egal cu $k^2 + h^2$ în cazul pătratelor și $k^2 + kh + h^2$ în cazul hexagoanelor, unde k, h sînt numere naturale nu ambele nule deodată (mai sînt și alte formule care reprezintă aceleași mulțimi de numere ca, de exemplu, $k^2 - kh + h^2$ pentru hexagoane).

Vom lua ca unitate de lungime distanța dintre centrele a două pătrate sau hexagoane vecine.

Vom trasa cu linii groase negre rețeaua care trece prin centrele pătratelor sau hexagoanelor de aceeași culoare, să zicem roșie (fig. 9,10). În cazul hexagoanelor vom duce linii numai în două direcții (nu în trei), astfel încît rețeaua va fi formată nu din triunghiuri echilaterale, ci din romburi. Fie $ABCD$ un pătrat sau un romb din rețea. Vom deduce formula pentru aria sa.

În cazul pătratului vom duce prin punctele A și B drepte paralele cu laturile pătratelor colorate și vom nota punctul lor de intersecție prin M. Lungimile $AM = k$ și $BM = h$ sînt numere naturale (unul dintre ele poate fi zero). De exemplu în figura 6, a, $k = 3$, $h = 2$. Atunci $AB = \sqrt{k^2 + h^2}$, iar aria lui $ABCD$ este egală cu $k^2 + h^2$.

În cazul rombului vom duce prin punctele A și B paralele la apotemele hexagoanelor, iar punctul lor de intersecție îl notăm cu M. Unghiul AMB poate fi egal cu 120° sau cu 60°. Vom duce dreptele astfel încît el să fie de 120°. Lungimile $AM = k$ și $BM = h$ sînt numere naturale (unul dintre ele

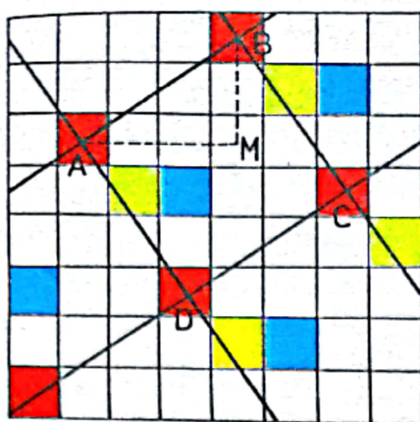


Fig. 9

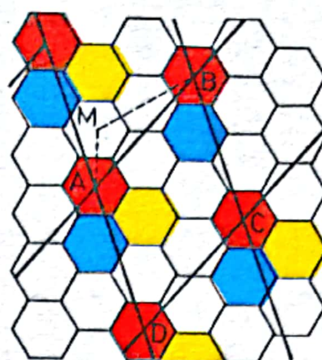


Fig. 10

poate fi şi zero). În figura 10, $k = 1$, $h = 2$. Atunci $AB = \sqrt{k^2 + kh + h^2}$ și aria rombului este egală cu $\frac{\sqrt{3}}{2}(k^2 + kh + h^2)$.

Vom demonstra că numărul culorilor care participă la colorare este egal cu raportul dintre aria lui $ABCD$ şi aria unui pătrăţel (colorat) (cazul a)) sau a unui hexagon (cazul b)) şi deci egal cu:

$k^2 + h^2$ în cazul pătratelor;

$k^2 + kh + h^2$ în cazul hexagoanelor $\left(\text{fiindcă aria unui hexagon este } \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Acest lucru rezultă direct din următoarea lemă.

Lemă fundamentală. Partea din $ABCD$ colorată în fiecare dintre culorile care participă la colorare este sau un pătrat (în cazul a), **respectiv un hexagon** (în cazul b) **sau este formată din bucăţi** (pentru culoarea roşie, patru; pentru celelalte culori două) **din care se poate compune un pătrat, respectiv un hexagon.**

Demonstraţia lemei nu este dificilă şi propunem cititorilor să o facă singuri. Facem numai remarca următoare: colorarea tuturor pătratelor (romburilor) din reţea este aceeaşi, adică dacă s-ar decupa un pătrat (romb) $ABCD$ şi s-ar aşeza peste pătratul vecin (romb), atunci partea din $ABCD$ colorată într-o anumită culoare s-ar suprapune exact peste partea respectivului pătrat (romb) de aceeaşi culoare.

Există un alt mod de a da această demonstraţie mai frumos, dar care necesită o solicitare mai mare a imaginaţiei. Ne limităm la început la cazul reţelei formate din pătrate. Decupăm din plan pătratul $ABCD$ şi formăm din el un tub, un cilindru colorat pe partea exterioară, lipind împreună laturile AB şi CD. Acest tub este limitat de două circumferinţe obţinute din laturile AD şi BC. Lipim aceste două circumferinţe una de cealaltă (făcînd să coincidă punctul $A = D$ cu punctul $B = C$). Aria corpului format este egală cu $k^2 + h^2$ şi fiecare parte a sa colorată cu o anumită culoare este un pătrat 1×1.

În cazul hexagoanelor, ajungem la acelaşi rezultat dacă lipim în acelaşi mod un dreptunghi care are o latură comună cu rombul $ABCD$ şi alta este înălţimea rombului.

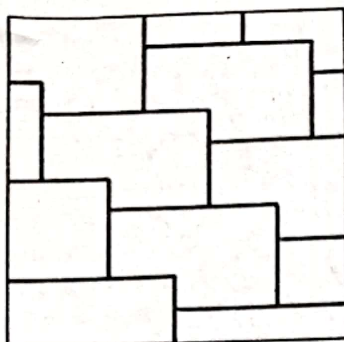


Fig. 11 Planul este acoperit de figuri congruente fiecare formată din 13 pătrățele. Pentru ca să formăm un tor prin lipire trebuie luat un poligon format din 13 figuri

Menționăm că planul poate fi acoperit și cu alte figuri congruente astfel încît părțile din ele colorate cu aceleași culori să fie congruente. De exemplu, în figura 11 se indică acoperirea planului cu figuri formate din alăturarea a două pătrate de laturi k și h. Aici $k = 3$, $h = 2$ (13 culori).

II. Fie date numerele $m = k^2 + h^2$ sau $n = k^2 + kh + h^2$. Vom arăta că planul poate fi acoperit așa cum cere problema cu pătrate colorate în m culori sau hexagoane colorate în n culori. Acoperim planul cu pătrate sau hexagoane regulate și începem să le colorăm în felul următor:

Colorăm unul dintre ele în roșu. Numărăm de la el k pătrate (hexagoane) într-o parte, apoi rotim cu 90° pentru pătrate și cu 60° pentru hexagoane și numărăm h pătrate (hexagoane) în noua direcție, iar pătratul (hexagonul) la care ajunge îl colorăm din nou în roșu. Pe segmentul care unește centrele celor două pătrate (hexagoane) colorate în roșu construim un pătrat (în cazul a) sau un triunghi echilateral (în cazul b). Construind alături de el pătrate (triunghiuri echilaterale) congruente, vom obține centrele tuturor pătratelor (hexagoanelor) care trebuie colorate cu roșu. Efectuînd o translație a mulțimii tuturor pătratelor (hexagoanelor) colorate în roșu, vom obține o mulțime de pătrate necolorate pe care le colorăm cu altă culoare ș.a.m.d. pînă se acoperă tot planul cu pătrate (hexagoane) colorate. După cele demonstrate mai sus numărul culorilor va fi egal cu $k^2 + h^2$ în cazul a) și $k^2 + kh + h^2$ în cazul b).

III. Ce numere naturale pot fi reprezentate sub forma $k^2 + h^2$ sau $k^2 + kh + h^2$?. Pentru ca să scriem primele astfel de numere este convenabil să facem două tabele: tabela 1, pentru $k^2 + h^2$, tabela 2, pentru $k^2 + kh + h^2$.

Tabela 1

k/h		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1		2	5	10	17	26	37	50	65	82	101
2			8	13	20	29	40	53	68	85	104
3				18	25	34	45	58	73	90	109
4					32	41	52	65	80	97	116
5						50	61	74	89	106	125
6							72	85	100	117	136
7								98	113	130	149
8									128	145	164
9										162	181
10											200

Tabela 2

k/h		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1		3	7	13	21	31	43	57	73	91	111
2			12	19	28	39	52	67	84	103	124
3				27	37	49	63	79	97	117	139
4					48	61	76	93	112	133	156
5						75	91	109	129	151	175
6							108	127	148	171	196
7								147	169	193	219
8									192	217	244
9										243	271
10											300

Numerele de sub diagonală repetă pe cele de deasupra şi nu s-au mai scris. Unele numere apar de două ori. Acest lucru înseamnă că pentru numărul respectiv există două colorări diferite ale planului. Este uşor de scris aceste numere în ordine crescătoare. Din prima tabelă obţinem: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26,... la a doua tabelă: 1, 3, 4, 7, 12, 13, 16, 19, 21, 25, 27, 28, ... Să presupunem că am scris aceste numere pînă la unul anumit şi căutăm următorul număr. Liniile curbe duse în prima tabelă ne ajută să facem acest lucru. Pentru ca să ne dăm seama cum s-au dus, să observăm că în tabela 1 fiecare număr este egal cu pătratul distanţei de la centrul acelei căsuţe în care este scris pînă la punctul O (ca unitate de lungime s-a luat latura căsuţei). De aceea, dacă vom duce cîteva cercuri cu centrele în punctul O, ele împart numerele noastre în grupe în ordine crescătoare. Dacă vom încerca să ducem cu mîna linii analoage în tabelul al doilea, ele par a fi linii drepte dar nu sînt. Graficele unor ecuaţii de forma $k^2 + kh + h^2 = c =$ $=$ const. într-un sistem de axe de coordonate cu originea în O şi cu axa Ok spre dreapta şi axa Oh în jos sînt nişte elipse, ceea ce se vede mai bine dacă facem schimbarea de variabile $x = k + h$, $y = k - h$.

Am obţinut răspunsul la problemă. Ne putem pune întrebarea dacă el nu mai poate fi îmbunătăţit în sensul următor. Dacă la o altă problemă am obţine răspunsul: toate numerele de forma $k^2 + h^2 + m^2 + n^2$ unde k, h, m, n sînt numere naturale, de fapt am obţine răspunsul: orice număr natural, întrucît orice număr natural poate fi scris în forma de mai sus. Ne întrebăm dacă şi în şirurile de numere găsite la problema dată de la un moment dat nu intră toate numerele naturale. Ca să arătăm că nu este aşa, ne vom folosi din nou de liniile duse în tabele.

Vom duce, în tabela 1, un cerc cu centrul în punctul O de rază n. Centrele tuturor căsuţelor în care sînt scrise numere mai mici sau egale cu n^2 sînt situate în interiorul sau pe frontiera sectorului de cerc cu unghiul la centru de 45°. De aceea, toate aceste căsuţe se găsesc în interiorul unei figuri obţinute dacă adăugăm la acest sector o bandă la lăţime 1. Aria acestei figuri este mai

mică decît $\frac{\pi n^2}{8} + 3n + 4$. De aici rezultă că printre primele n^2 numere naturale sînt mai puţine decît $\frac{\pi n^2}{8} + 3n + 4$, care se pot reprezenta sub forma $k^2 + h^2$. Pentru n mare, al doilea număr este mai mic decît n^2 şi raportul lor este aproximativ egal cu $\frac{\pi}{8}$. În realitate, întrucît unele numere din tablou se repetă, numerele de forma $k^2 + h^2$ sînt chiar mai puţine. Se vede uşor că numerele care se reprezintă sub forma $k^2 + kh + h^2$ reprezintă o fracţie şi mai mică.

M 4. *Se dă segmentul AB. Să se găsească în plan mulţimea punctelor C astfel încît în triunghiul ABC mediana dusă din vîrful A să fie congruentă cu înălţimea dusă din vîrful B.*

A XXXII-a olimpiadă matematică din Moscova

P r i m a   r e z o l v a r e. Se ştie că pentru a rezolva o problemă de loc geometric trebuie să se realizeze două etape: 1) toate punctele mulţimii găsite satisfac cerinţa problemei 2) toate punctelele care satisfac la cerinţa problemei aparţin mulţimii găsite. Vom începe cu a doua. Să presupunem că s-a dat segmentul AB şi fie punctul C care satisface cerinţa problemei. Notăm cu AD mediana triunghiului ABC. Completăm triunghiul pînă la un paralelogram prelungind mediana AD pînă în punctul E, astfel ca $AD = DE$. Aici sînt posibile două cazuri după cum unghiul AEB este ascuţit sau obtuz.

a) Fie unghiul AEB ascuţit (fig. 12, a). Vom duce $BF \perp AC$, $AK \parallel BF$, atunci în triunghiul dreptunghic AEK, cateta AK este congruentă cu jumătatea ipotenuzei AE, deci $\sphericalangle AEB = 30°$.

b) Fie unghiul AEB obtuz (fig. 12, b). Ducem $BF \perp AC$, $AK \parallel BF$ şi obţinem, ca în cazul a), că $\sphericalangle AEK = 30°$, de aceea $\sphericalangle AEB = 150°$ (deosebirea faţă de cazul a), constă în faptul că acum punctele K şi B sînt situate de părţi diferite faţă de E).

Astfel, dacă C este punctul căutat, atunci segmentul AB se vede din punctul E sub un unghi de 30° sau de 150°. Cum se ştie toate aceste puncte E se găsesc pe două cercuri O_1 şi O_2 care sînt tăiate de coarda AB în arce de 300° şi 60° (fig. 13, a) şi prin urmare toate punctele C sînt situate pe cercurile O_1' şi O_2' obţinute din O_1 şi O_2 printr-o translaţie de segment $l = AB$ în direcţia de la B la A (fig. 13, b).

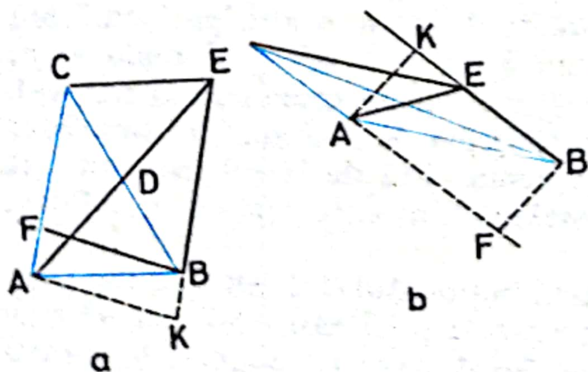


Fig. 12

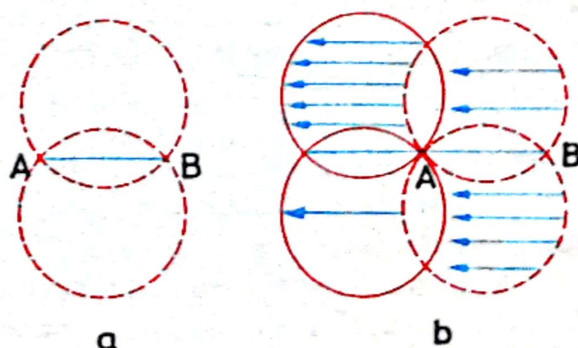


Fig. 13

Acum vom demonstra că orice punct M al cercurilor O'_1 şi O'_2 aparţine mulţimii căutate de puncte. Fie M un punct arbitrar al unuia dintre aceste cercuri; atunci, ducînd $MK = AB$, $MK \parallel AB$ vom obţine punctul K pe unul dintre cercurile O_1 sau O_2 (fig. 14, a, b). În figura 14, a, $BF \perp MA$ $AL \parallel BF$, $AL = BF$, atunci (din $\triangle AKL$), $AL = \frac{1}{2} AK$, adică punctul M satisface condiţiei. În mod analog, în figura 14, b, $BF \perp MA$, $AL = BF$, $AL \parallel BF$, $\sphericalangle AKB = 150°$, $\sphericalangle AKL = 180° - \sphericalangle AKB = 30°$, adică $AL = \frac{1}{2} AK$ şi punctul M satisface de asemenea condiţiei. Astfel toate punctele lui O'_1 şi O'_2 în afară de punctele N şi A satisfac condiţiei.

A d o u a r e z o l v a r e. Introducem un sistem de coordonate cu originea în A şi fie ca punctul B să aibă coordonatele (2; 0), iar punctul căutat C, coordonatele $(x; y)$. Fie AF mediana în triunghiul ABC, $BK \perp AC$ (fig. 15). Se demonstrează uşor că punctul F are coordonatele $\left(\frac{x+2}{2}; \frac{y}{2}\right)$. Atunci $AF^2 = \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}$. Prin ipoteză $BK^2 = AF^2$, de aceea, din asemănarea triunghiurilor AK şi ACD rezultă că $\frac{BK^2}{AK^2} = \frac{CD^2}{AD^2}$ sau

$$\frac{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}}{4 - \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}} = \frac{y^2}{x^2}. \tag{1}$$

Din (1) prin calcule obţinem

$$y^4 + (2x^2 + 4x - 12)y^2 + (2x + x^2)^2 = 0. \tag{2}$$

Aceasta este ecuaţia care leagă coordonatele punctelor căutate. Membrul stîng al ecuaţiei (2) se descompune în factori:

$$[(x + 1)^2 + (y + \sqrt{3})^2 - 4][(x + 1)^2 + (y - \sqrt{3})^2 - 4] = 0. \tag{3}$$

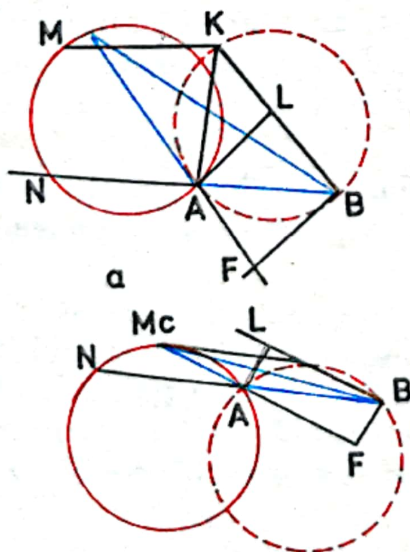


Fig. 14

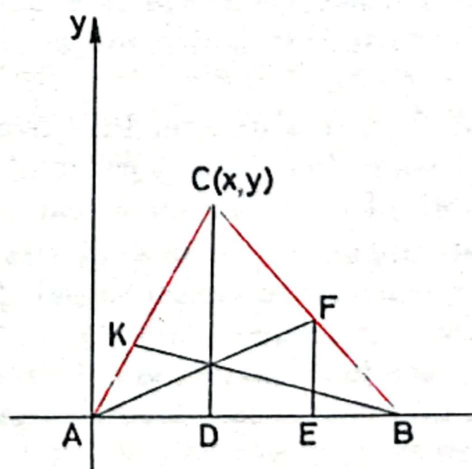


Fig. 15

Acest lucru s-ar putea face în felul următor. Notăm $y^2 = z$. Atunci (2) este o ecuaţie de gradul al doilea în raport cu z. Pentru ca să-i găsim rădăcinile, aplicăm formula cunoscută şi obţinem

$$z_{1,2} = \frac{12 - 2x^2 - 4x \pm \sqrt{(12 - 2x^2 - 4x)^2 - 4(2x + x^2)^2}}{2} = 6 - x^2 - 2x \pm$$

$$\pm 2\sqrt{3(3 - x^2 - 2x)} = (\sqrt{3 - x^2 - 2x} \pm \sqrt{3})^2$$

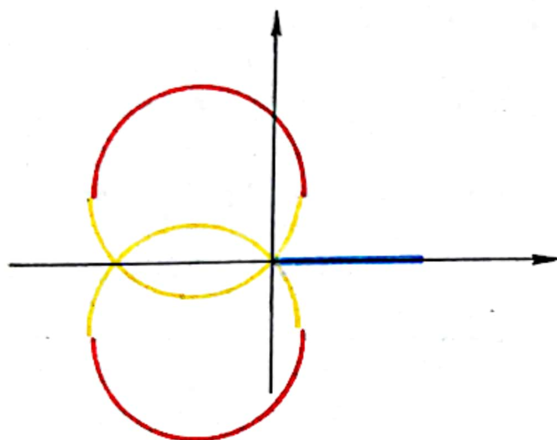


Fig. 16

Ecuaţia (2) se poate atunci scrie astfel:

$$[y^2 - (\sqrt{4 - (x + 1)^2} + \sqrt{3})^2][y^2 - (\sqrt{4 - (x + 1)^2} - \sqrt{3})^2] = 0 \quad (4)$$

(În figura 16 sînt puse în evidenţă mulţimile de puncte care corespund celor doi factori, una cu roşu, alta cu galben.) Dacă se continuă descompunerea în factori în (4) (ca diferenţe de pătrate) şi regruparea lor, se obţine (3). La fel s-ar rezolva problema în care $AD/BF = k$.

M 5. *În mulţimea E formată din n elemente, se pun în evidenţă m submulţimi diferite (diferite şi de E), astfel încît pentru oricare două elemente din E se găseşte exact una dintre submulţimile date în care intră ambele aceste elemente. Să se demonstreze că $m \geqslant n$. În ce caz este posibilă egalitatea?*

N. Bourbaki

Se pot da şi alte formulări ale acestei probleme. Iată două dintre ele.

a) Elevii unei şcoli pleacă adesea în grupuri să mănînce îngheţată. După o astfel de ieşire, se ceartă astfel încît ulterior oricare doi elevi din grup nu mai mănîncă îngheţată împreună. La sfîrşitul anului au văzut că nu pot să mai meargă la cofetărie decît numai cîte unul. Să se demonstreze că dacă numărul acestor vizite este mai mare decît 1, atunci el nu e mai mic decît numărul elevilor şcolii.

b) Se dau n puncte. Prin fiecare două puncte se duce exact o dreaptă şi pe fiecare dreaptă sînt cel mult $n - 1$ puncte. Trebuie să se demonstreze că numărul dreptelor nu e mai mic decît n.

Este util să ne gîndim dacă aceste formulări trimise de cititori sînt într-adevăr echivalente cu textul iniţial. Dacă ne închipuim elementele mulţimii E ca puncte şi submulţimile ca drepte care trec prin aceste puncte şi facem pentru acestea figuri de genul celor de mai jos (fig. 17,18), vom vedea că nu pot fi drepte cele care trec prin puncte. Vezi şi textul problemei **M 36**. Deci problema b) nu este echivalentă cu cea iniţială.

Vom expune în continuare rezolvarea problemei urmînd indicaţiile autorului. Vom retranscrie ipoteza în felul următor.

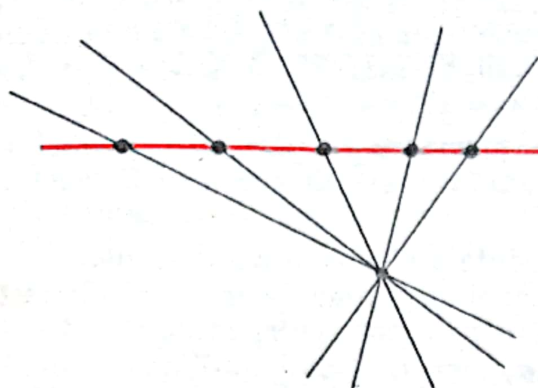


Fig. 17

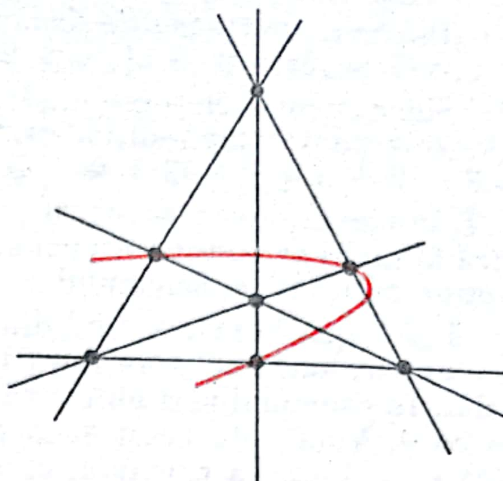


Fig. 18

Se dau n elemente diferite şi un sistem format din m mulţimi formate din aceste elemente, astfel încît:

1) nici o mulţime din sistem nu conţine toate elementele;

2) oricare două dintre cele n elemente se găsesc împreună în una dintre mulţimile sistemului;

3) dacă două elemente se găsesc împreună în una dintre mulţimile sistemului, atunci ele nu se întîlnesc împreună în nici una dintre celelalte mulţimi ale sistemului.

Să demonstrăm că $m \geqslant n$.

Vom da un exemplu de o astfel de aranjare a elementelor. Fie $n = 5$ şi elementele a, b, c, d, e. Formăm următorul sistem de mulţimi din aceste elemente:

$$(a, b), (a, c, e), (b, e), (b, c), (b, d), (a, d), (d, e), (c, d).$$

Evident că sînt satisfăcute condiţiile 1, 2, 3. Aici $m = 8$ şi deci $m \geqslant n$. Pentru ca demonstraţia să fie mai intuitivă ne vom referi la acest exemplu.

Demonstraţie. Remarcăm că $n > 2$ şi că este suficient să se demonstreze inegalitatea $m \geqslant n$ pentru sistemele de mulţimi care conţin cel puţin două elemente.

1. Sistemul este format din cel puţin două elemente. Dacă sistemul este format dintr-o singură mulţime, atunci datorită condiţiei 2), această mulţime ar conţine deodată toate elementele, ceea ce contrazice condiţia 1).

2. Fiecare element intră cel puţin în două dintre mulţimile sistemului. Dacă un element ar intra numai într-o mulţime a sistemului, atunci aceasta trebuie — datorită lui 2) — să conţină toate cele n elemente, ceea ce contrazice pe 1).

3. Un acelaşi element nu poate intra deodată în toate mulţimile sistemului. Să presupunem că un element x intră în toate mulţimile sistemului. Atunci, datorită condiţiei 3), oricare două mulţimi ale sistemului nu conţin alte elemente comune afară de x. Prin urmare, oricare două elemente diferite de x nu se întîlnesc în nici una dintre mulţimi, ceea ce contrazice pe 2).

4. Punem în corespondenţă fiecărui element numărul mulţimilor sistemului în care intră, adică socotim de cîte ori se repetă el în acest sistem. În exemplul de mai sus, lui a îi corespunde 3, lui b îi corespunde 4 ş.a.m.d.

Fiecărei mulţimi din sistem îi punem în corespondenţă numărul de elemente pe care le conţine.

Suma numerelor corespunzătoare elementelor este egală cu suma numerelor corespunzătoare mulţimilor. În exemplul de mai sus: $3 + 4 + 3 + 4 + 3 = 2 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 17$.

Într-adevăr, dacă se consideră două elemente diferite atunci cînd ele intră în mulţimi diferite, atunci ambele sume reprezintă numărul elementelor tuturor mulţimilor sistemului.

5. *Notaţii.* Vom lua unul dintre elementele căruia îi corespunde cel mai mic număr, adică cel care intră în cel mai mic număr de mulţimi ale sistemului. În exemplul ales putem să luăm sau pe a, sau pe c, sau pe e; îl vom lua pe a. Vom nota acest element prin a_n, iar numărul mulţimilor în care intră el, pin k_n. În exemplu, $a_5 = a$, $k_5 = 3$. Datorită propoziţiilor 2 şi 3, avem $2 \leqslant k_n < m$.

Mulţimile în care intră a_n, vor fi notate într-o anumită ordine prin $A_1, A_2, \ldots, A_{k_n}$, iar celelalte prin $A_{k_n+1}, \ldots, A_m$. În exemplu, $A_1 = (a, b)$, $A_2 = (a, c, e)$, $A_3 = (a, d)$, $A_4 = (b, e)$, ..., $A_8 = (c, d)$.

Să considerăm primele k_n mulţimi $A_1, A_2, \ldots, A_{k_n}$. Raţionînd la fel ca la propoziţia 3, vedem că oricare două nu conţin aceleaşi elemente în afară de a_n. Prin urmare, putem să luăm cîte un element din fiecare dintre aceste mulţimi şi să le notăm respectiv prin $a_1, a_2, \ldots, a_{k_n}$. Celelalte elemente le vom nota într-o anumită ordine prin $a_{k_n+1}, a_{k_n+2}, \ldots, a_n$. În exemplu, avem $a_1 = b$, $a_2 = c$, $a_3 = d$, $a_4 = e$. Atunci $A_1 = (a_1, a_5)$, $A_2 = (a_2, a_4, a_5)$, $A_3 = (a_3, a_5)$, $A_4 = (a_1, a_4)$, $A_5 = (a_1, a_2)$, $A_6 = (a_1, a_3)$, $A_7 = (a_3, a_4)$ $A_8 = (a_2, a_3)$.

Vom nota acum numerele corespunzătoare elementelor $a_1, a_2, \ldots, a_{k_n}, \ldots, a_{n-1}$ în aceeaşi ordine prin $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$. Reamintim că elementului a_n îi corespunde numărul k_n şi că el este cel mai mic dintre numerele $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}, k_n$.

În sfîrşit vom nota numerele corespunzătoare mulţimilor $A_1, A_2 \ldots, A_m$ în aceeaşi ordine prin $s_1, s_2, \ldots, s_m$.

Atragem încă o dată atenţia asupra modului în care am numerotat elementele şi mulţimile.

În primul rînd, k_n este mai mic decît numerele $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$.

În al doilea rînd, k_n este numărul ultimei dintre mulţimile în care intră elementul a_n şi astfel elementul a_n nu intră în mulţimile $A_{k_n+1}, \ldots, A_m$.

Mulţimea A_i conţine elementul a_i dar nu conţine elementele a_j dacă $1 \leqslant i \leqslant k_n$, $1 \leqslant j \leqslant k_n$ şi $i \neq j$. În afară de aceasta conform propoziţiei de la punctul $k_1 + \ldots + k_n = s_1 + \ldots + s_m$.

6. Dacă elementul a_i nu aparţine nici unei mulţimi A_j atunci $k_i \geqslant s_j$. Într-adevăr, să presupunem că mulţimea A_j nu conţine elementul a_i şi este formată din s_j elemente diferite. Atunci elementul a_i trebuie să se întîlnească cu fiecare dintre aceste elemente într-una oarecare dintre celelalte mulţimi ale sistemului. Pe de altă parte, oricare două dintre aceste elemente nu se pot întîlni deodată în aceste mulţimi pentru că ele s-au întîlnit deja în A_j. Prin urmare numărul mulţimilor în care intră elementul a_i nu este mai mic decît numărul s_j.

7. Să considerăm primele k_n mulţimi $A_1, A_2, \ldots, A_{k_n}$ şi primele k_n elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{k_n}$. Ele au fost alese astfel încît fiecare mulţime A_i conţine

elementul a_i cu acelaşi indice dar nu conţine alte elemente dintre acestea cu alţi indici, atunci conform propoziţiei 6: $s_1 \leqslant k_2$, $s_2 \leqslant k_1$ dacă $k_n = 2$ şi

$$\left.\begin{array}{l} s_1 \leqslant k_2,\ s_2 \leqslant k_1, \ldots, s_{k_n} \leqslant k_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_1 \leqslant k_{k_n},\ s_2 \leqslant k_{k_n}, \ldots, s_{k_n} \leqslant k_{k_{n-1}} \end{array}\right\} \text{dacă } k_n > 2$$

În exemplu, $k_n = 3$ şi

$2 = s_1 \leqslant k_2 = 3$, $3 = s_2 \leqslant k_1 = 4$, $3 = s_3 \leqslant k_1 = 4$, $2 = s_1 \leqslant k_3 = 4$, $3 = s_2 \leqslant k_3 = 4$, $3 = s_3 \leqslant k_2 = 3$.

8. Adunînd toate inegalităţile vom obţine

$$(k_n - 1)(s_1 + s_2 + \ldots + s_{k_n}) \leqslant (k_n - 1)(k_1 + \ldots + k_{k_n})$$

sau

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n \leqslant k_1 + \ldots + k_n$$

9. Acum putem demonstra inegalitatea cerută $m \geqslant n$.
Să admitem că $m < n$. Vom compara cele două sume

$$S = (s_1 + s_2 + \ldots + s_{k_n}) + s_{k_n+1} + \ldots + s_m$$

şi

$$K = (k_1 + k_2 + \ldots + k_{k_n}) + k_{k_n+1} + \ldots + k_n.$$

Să remarcăm că am notat astfel mulţimile încît elementul a_n nu aparţine mulţimilor $A_{k_n+1}, \ldots, A_m$; deci $s_{k_n+1} \leqslant k_n, \ldots, s_m \leqslant k_n$ şi cu atît mai mult $s_{k_n+1} \leqslant k_{k_n+1}, \ldots, s_m \leqslant k_m$ fiindcă k_n este cel mai mic dintre toate numerele k_i. În cazul în care $m < n$, obţinem: $k_{k_n+1} + \ldots + k_n > s_{k_n+1} + \ldots + s_m$, dar atunci $s < K$ ceea ce contrazice propoziţia de la punctul 4.

Demonstraţia faptului că $m \geqslant n$ este terminată.

10. Să încercăm să vedem în ce caz are loc egalitatea.
Dacă $m = n$ atunci, după propoziţiile de la punctele 8, 9 şi 4 rezultă că:

$$k_1 + \ldots + k_{k_n} + \ldots + k_n = s_1 + \ldots + s_{k_n}$$

şi toate inegalităţile din 8 se transformă în egalităţi.
Întrucît k_n este cel mai mic număr dintre k_i, vom avea

$$s_{k_n+1} = \ldots = s_n = k_{k_n+1} + \ldots + k_n$$

În continuare vom considera două cazuri:

a) $k_n = 2$. În acest caz, se vede uşor că este posibil un astfel de sistem de mulţimi (a_n, a_1), $(a_n, a_2, a_3, \ldots a_{n-1})$, (a_1, a_2), $(a_1, a_3) \ldots (a_1, a_{n-1})$ (fig. 17). Pentru orice n sînt satisfăcute cerinţele problemei.

b) $k_n > 2$. În acest caz vom obţine că toate inegalităţile din 7, trebuie să se transforme în egalităţi. Comparînd aceste egalităţi, vom obţine că $s_1 = s_2 = \ldots = s_{k_n} = k_1 = k_2 = \ldots = k_{k_n}$.

Şi la fel ca şi la punctul a): $s_{k_n+1} = \ldots = s_n = k_{k_n+1} = \ldots = k_{n-1} = k_n$. Evident că unul dintre numerele $s_1, s_2, \ldots, s_{k_n}$ nu e mai mare decît unul dintre numerele $k_{k_n+1}, \ldots, k_{n-1}$ şi prin urmare $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = k_1 = k_2 = \ldots = k_n = l > 2$.

Ca rezultat obţinem că în acest caz este îndeplinită următoarea condiţie:

4) Fiecare mulţime conţine exact l elemente şi fiecare element intră exact în l mulţimi diferite.

Pentru aceasta este necesar ca $n = l(l-1) + 1$. Într-adevăr, să considerăm un element oarecare x. El trebuie să intre exact în l mulţimi, prin urmare toate aceste mulţimi conţin toate cele n elemente, astfel că x trebuie să se întîlnească cu toate elementele. În afară de aceasta, ele nu pot să conţină elemente comune fiindcă ele conţin elementul x. De aici obţinem egalitatea necesară.

Pentru $l = 3$, adică $n = 7$, se construieşte uşor sistemul necesar de mulţimi (fig. 18). Dar întrebarea privind valorile lui n de forma $l^2 - l + 1$ pentru care mulţimile formate din n elemente admit un sistem de submulţimi care să satisfacă la cerinţele 1), 2), 3) şi 4) se dovedeşte foarte grea.

Un astfel de sistem are o denumire specială: un plan proiectiv finit de ordin $l - 1$ (În figura 18 este reprezentat un plan proiectiv de ordin 2, format din 7 puncte şi 7 drepte). Se demonstrează uşor că pentru orice plan proiectiv finit este îndeplinită şi următoarea proprietate „duală" proprietăţii 2):

5) Orice două mulţimi din sistemul nostru au un element comun (evident că numai unul); cu alte cuvinte, orice două drepte se intersectează într-un punct.

Vom arăta cum se construieşte un plan proiectiv finit de ordin p (cu $n = p^2 - p + 1$) unde p este număr prim. Pentru aceasta trebuie să folosim „numere" dintr-o, p-aritmetică, adică din aritmetica resturilor după modulul p. Într-o astfel de aritmetică (a claselor de resturi modulo p) se poate împărţi orice „număr" la oricare altul diferit de zero. Vom numi „punct" tripletul de „numere" (x_1, x_2, x_3) abstracţie făcînd de un factor de proporţionalitate (adică tripletele (x_1, x_2, x_3) şi (kx_1, kx_2, kx_3) determină acelaşi punct). Vom conveni ca tripletul $(0, 0, 0)$ să nu fie considerat punct.

Vom numi „dreaptă" un triplet de numere (a_1, a_2, a_3) nu toate nule (abstracţie făcînd de un factor de proporţionalitate). Vom spune că punctul (x_1, x_2, x_3) aparţine dreptei (a_1, a_2, a_3) dacă şi numai dacă $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$.

Verificaţi că pentru aceste puncte şi drepte sînt îndeplinite condiţiile 1) — 5). Convingeţi-vă că pentru $p = 2$ se obţine exemplul de plan proiectiv de ordinul 2, reprezentat în figura 18.

În mod analog se poate demonstra că există un plan proiectiv de ordinul p^k, unde p este prim şi k orice număr natural. Se demonstrează că pentru o infinitate de valori ale lui N nu există plane proiective de ordinul N (în particular pentru $N = 6$, $N = 14$). Dar nici măcar pentru $N = 10$ nu se ştie dacă există sau nu un plan proiectiv; ca să se ia în considerare toate posibilităţile nu e în stare nici o maşină electronică de calcul.

A. Toom, J. Rabbot, V. Gutenmaher

M 6. *Cîte poziţii ale acelor unui ceas există în care nu se poate determina timpul dacă nu se ştie care este acul care indică ora şi care este cel care indică minutele. (Se consideră că poziţiile acelor se pot determina exact dar nu se poate urmări mişcarea lor.)*

Răspuns. Există 132 de astfel de poziţii. Cu alte cuvinte există 66 de perechi de poziţii ale acelor, astfel încît în fiecare dintre aceste perechi o poziţie se obţine din cealaltă prin înlocuirea acului care indică orele prin acul care indică minutele (fig. 19); desigur că nu se iau în considerare poziţiile în

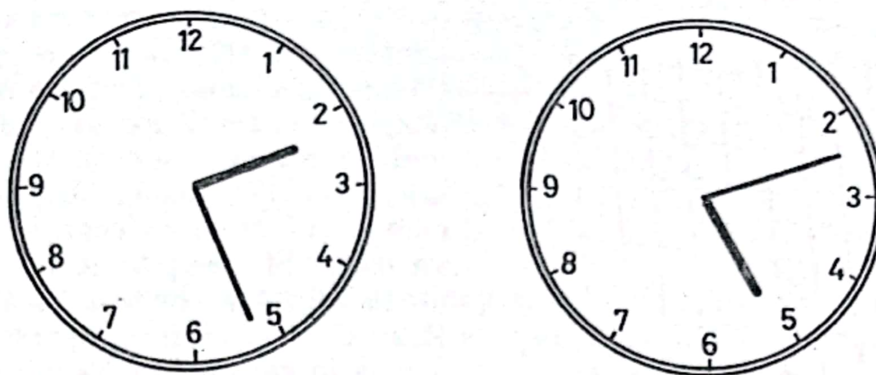


Fig. 19

care direcţiile celor două ace coincid (şi sensurile); în aceste cazuri timpul este perfect determinat.

P r i m a   r e z o l v a r e. Vom considera cadranul împărţit în 12 părţi. Să considerăm una dintre poziţiile de care este vorba în problemă. Să presupunem că unul dintre ace ocupă poziţia x, iar celălalt poziţia y; aici $0 \leqslant x < 12$, $0 \leqslant y < 12$. Dacă primul ac indică orele şi al doilea minutele, atunci trebuie să fie satisfăcută egalitatea

$$x = a + \frac{5y}{60} \tag{1}$$

unde a este un număr natural $0 \leqslant a < 11$.

În mod analog, dacă primul ac indică minutele şi al doilea orele, atunci

$$y = b + \frac{5x}{60}. \tag{2}$$

Sistemul format din cele două egalităţi (1) şi (2), poate fi înlocuit printr-altul echivalent:

$$\begin{cases} 12x = 12a + y \\ 12y = 12b + x \end{cases} \qquad \begin{cases} 12x - 12a = y \\ 143x = 12(b + 12a) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 12 \cdot \dfrac{b + 12a}{143} \\ y = 12 \cdot \dfrac{a + 12b}{143} \end{cases}$$

Aici $0 \leqslant a \leqslant 11$, $0 \leqslant b \leqslant 11$ sînt numere naturale. Fiecare pereche (x, y) care satisface acest sistem reprezintă o soluţie. În total sînt $12^2 = 144$. E clar că în cazurile $x = y$, adică $a = b$ nu avem soluţie a problemei propuse deci le eliminăm. Rămîn 132. (Două dintre ele, corespunzătoare valorilor $a = 2$, $b = 5$ şi $a = 5$, $b = 2$ sînt reprezentate în figura 19.)

Iată altă soluţie mai intuitivă. Ne dăm poziţia acului care indică minutele în funcţie de poziţia acului care indică orele, y funcţie de x. Graficul acestei funcţii $x \to y$ este dat în figura 20. Acest grafic este format din mulţimea poziţiilor (x, y) ale acelor, care se pot vedea pe cadran. Ne interesează acele perechi (x, y) pentru care şi perechile (y, x) aparţin acestei mulţimi. Dar punctul (y, x) este simetric cu punctul (x, y) faţă de bisectoarea unghiului xOy. În figura 20 mulţimea acestor puncte este desenată cu roşu. Rămîne de găsit numărul punctelor de intersecţie dintre liniile albastre şi cele roşii (fără a considera punctele situate pe bisectoarea $x = y$). Se vede uşor că sînt 132, adică 66 de perechi de puncte simetrice faţă de bisectoare.

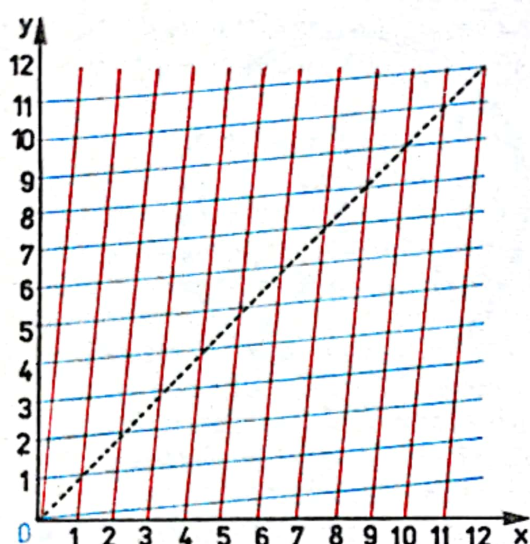


Fig. 20

A treia rezolvare. Să considerăm alături de ceasul nostru (la dreapta) unul imaginar care merge exact de 12 ori mai repede. Pornim ambele ceasuri deodată atunci cînd ele arată ora 12; atunci, tot timpul acul care arată orele pe ceasul din dreapta va coincide ca poziție cu acul care arată minutele pe ceasul din stînga. Pozițiile care ne interesează pe noi sînt acelea în care acul care indică orele pe ceasul din stînga are aceeași poziție cu acul care indică minutele pe ceasul din dreapta (gîndiți-vă de ce?). Dintre cele 144 de rotații pe care le face acul care indică minutele ceasului din dreapta în timp ce acul care indică orele ceasului „normal" face o rotație, și la fiecare dintre rotații apare o coincidență, trebuie excluse cele 12 cazuri în care pozițiile celor patru ace coincid și deci rămîn 132.

M 7. *a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi. Să se demonstreze că*

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geqslant 3\,.$$

S. Berkolaiko

Vom da una dintre cele mai scurte rezolvări dintre multele posibile. Vom folosi numai inegalitatea cunoscută

$$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\geqslant 2 \tag{1}$$

unde $m, n > 0$.

Vom introduce notațiile

$$b+c-a=x,\ c+a-b=y,\ a+b-c=z. \tag{2}$$

Observăm că
$$x>0,\ y>0,\ z>0 \tag{3}$$

ceea ce rezultă din faptul că o latură a unui triunghi este mai mică decît suma celorlalte două. Din (2) rezultă că

$$a=\frac{y+z}{2},\ b=\frac{x+z}{2},\ c=\frac{x+y}{2}$$

deci inegalitatea inițială poate fi scrisă astfel:

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}\geqslant 3 \tag{4}$$

Transformînd expresia din (4) și folosind (1) și (3), obținem:

$$\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\right]\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(2+2+2)=3$$

ceea ce și trebuia demonstrat.

Menţionăm că în mod analog se poate demonstra inegalitatea mai generală:

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3 + \ldots + x_n - x_1} + \frac{x_2}{x_3 + x_4 + \ldots + x_n + x_1 - x_2} + \ldots +$$
$$+ \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} - x_{n-1}} + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} - x_n} \geqslant \frac{n}{n-2}$$

unde toţi numitorii sînt pozitivi.

În încheiere menţionăm că din inegalitatea demonstrată rezultă direct un fapt geometric. Fie R raza cercului circumscris triunghiului, r raza cercului înscris. Se ştie că

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{S}{p}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{5}$$

unde S este aria triunghiului, iar p semiperimetrul său. Din (2) rezultă că:

$$p - a = \frac{x}{2}, \quad p - b = \frac{y}{2}, \quad p - c = \frac{z}{2}. \tag{6}$$

Folosind pe (5) şi pe (6), obţinem

$$\frac{R}{2r} = \frac{abcp}{8S^2} = \frac{abcp}{8p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} =$$
$$= \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz} = \frac{1}{4}\left[1 + \left(\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z}\right)\right].$$

Observăm că în paranteza rotundă din membrul drept al ultimei egalităţi este chiar membrul stîng al inegalităţii (4). Folosind-o pe aceasta, obţinem că

$$\frac{R}{2r} \geqslant 1, \quad \text{adică} \quad R \geqslant 2r.$$

Încercaţi să demonstraţi acest lucru geometric (ceea ce este mult mai greu).

M 8. *Două persoane joacă următorul joc. Dintr-o cutie de chibrituri care conţine 25 de beţe, fiecare ia pe rînd cîte unul, două sau trei beţe. Cîştigă acela care la sfîrşitul jocului (după ce toate beţele au fost luate) are un număr par de beţe. Cine cîştigă la un joc corect, cel care începe sau adversarul? Cum trebuie să joace cel care începe ca să cîştige? Cum se modifică răspunsul dacă se consideră cîştigător cel care are un număr impar de beţe?*
Studiaţi acest joc în cazul general cînd sînt $2n + 1$ beţe şi se pot lua deodată orice număr de beţe de la 1 la m.

Rezolvare. Pentru ca să putem vorbi de joc trebuie să dăm o denumire participanţilor. Vom conveni ca unul dintre ei să fie numit Eu, iar celălalt El.

Mai înainte să generalizăm puţin ipoteza problemei. Numărul N de chibrituri poate fi oricare, nu numai impar. În cazul în care N este par se consideră că va cîştiga unul dintre jucători dacă ambii au la sfîrşit un număr par de beţe şi va cîştiga celălalt dacă vor avea ambii jucători un număr impar de beţe.

Vom considera, strict vorbind, un număr infinit de jocuri fiindcă N şi m pot să fie orice numere naturale. Chiar dacă m şi N sînt daţi, de asemenea sînt posibile două variante: Eu cîştig dacă la sfîrşitul jocului am un număr de beţe 1) par, 2) impar.

Vom vorbi la început despre toate variantele acestui joc împreună.
Să stabilim ce trebuie să țină minte jucătorul în cursul jocului. Trebuie să țină minte toate mișcările sale și ale adversarului de la începutul jocului?. Nu, în orice variantă este de ajuns să știe lucrurile următoare:

1) cîte bețe au mai rămas în cutie;
2) dacă numărul bețelor pe care le are el este par;
3) cine este de rînd să joace.

Dacă se dau acești trei parametri, vom zice că s-a dat starea jocului. În fiecare astfel de stare, jucătorul poate să facă m mișcări diferite (sau mai puține, dacă au mai rămas de luat mai puțin de m bețe). Fiecare mișcare a lui trimite jocul într-o nouă stare, în care va juca partenerul său.

Vom reprezenta stările jocului sub forma unor căsuțe sau cerculețe, iar mișcările posibile sub forma unor săgeți.

În figurile 21—24, în tabelele respective:

În coloana I, numărul rîndului m arată cîte bețe au mai rămas de luat de pe masă (din cutie).

Coloana a II-a arată faptul că Eu am un număr par de bețe și Eu joc. Coloana a III-a arată faptul că Eu am un număr par de bețe și El joacă. Coloana a IV-a arată faptul că Eu am un număr impar de bețe și Eu joc. Coloana a V-a arată faptul că Eu am un număr impar de bețe și El joacă.

Tabela din figura 21 este făcută pentru cazul $m = 2$ (se pot lua unul sau două bețe la o mișcare) și Eu cîștig dacă la sfîrșitul jocului Eu am un număr par de bețe. Sînt desenate numai situațiile în care pe masă au rămas cel mult șapte bețe. Săgețile însemnate diferit arată cum se poate juca: Jucătorul care e la mișcare în această căsuță poate merge după oricare săgeată care iese din ea. De exemplu, prima căsuță din stînga din rîndul cu numărul 5 (punctat) corespunde stării jocului în care, pe masă au rămas 5 bețe, Eu am un număr par de bețe și Eu urmează să joc, iar cele două săgeți care pleacă din această căsuță, arată stările în care Eu pot să duc jocul prin mutarea pe care o voi face.

Tabela se poate continua în jos oricît de mult. Săgețile care ies din fiecare căsuță se obțin printr-o translație din săgețile care ies din oricare altă căsuță din aceeași coloană (în ultimele două căsuțe de sus, unele săgeți „au dispărut").

I	II	III	IV	V
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

Fig. 21 Tabela stărilor posibile și mișcările jocului dacă m = 2.

Vom numi o stare c î ș t i g ă t o a r e și vom pune în căsuța respectivă litera C, dacă atunci cînd jocul începe din această căsuță Eu pot să cîștig, oricum ar încerca El să mă împiedece.

Vom numi o stare n e c î ș t i g ă t o a r e și vom nota căsuța corespunzătoare cu N, dacă atunci cînd jocul începe din această stare, El poate cîștiga și dacă El nu greșește, Eu nu pot să-l împiedic să cîștige.

Trecem acum la partea principală a rezolvării. Vom pune în toate căsuțele tabelei literele C și N. Vom face acest lucru la început pentru jocul descris în figura 21. În rîndul O, evident că literele trebuie puse astfel $C\ C\ N\ N$ întrucît con-



siderăm că eu am cîştigat dacă la sfîrşitul jocului am un număr par de beţe. Mai departe, vom pune literele de sus în jos după următoarea regulă:

I. Dacă este rîndul meu (adică este o căsuţă în coloana a II-a sau a IV-a, atunci în ea se pune:

litera C dacă cel puţin una dintre săgeţi duce la o căsuţă cu litera C;

litera N, dacă oricare săgeată care pleacă din ea duce la o căsuţă cu litera N.

II. Dacă este rîndul lui (adică este o căsuţă în coloana a III-a sau a V-a), în ea se pune:

litera N dacă cel puţin o săgeată din ea duce la o căsuţă cu litera N,

litera C, dacă fiecare săgeată care pleacă din ea duce la o căsuţă cu litera C.

Întrucît toate săgeţile din tabelă merg de jos în sus, această regulă dă posibilitatea să se completeze toată tabela oricît am prelungi-o în jos.

În cazul nostru ($m = 2$) pentru ca să se completeze căsuţele liniei a n-a este suficient să se ştie cum sînt completate căsuţele din liniile a $(n - 1) - a$ şi $(n - 2) - a$. În realitate nici nu trebuie trasate toate săgeţile, aşa cum sînt în figura 21. Este suficient ca pe o bucată separată de calc să se deseneze şablonul, adică totalitatea săgeţilor care ies din căsuţele unei linii şi plimbînd acest şablon pe toate liniile tabelei, să se completeze acestea cu litere C şi N după regula de mai sus. În figura 22 se arată momentul în care s-a completat tabela pînă la linia a 5-a şi urmează să se completeze a 6-a. Astfel s-ar putea completa tabela pînă la orice linie, de exemplu pînă la a 25-a, şi să se vadă ce literă este în prima căsuţă de pe linia a 25-a. Dacă este C, atunci la jocul cu 25 de beţe, cel care începe va cîştiga şi dacă este N, va pierde.

Într-adevăr, mai departe de a 5-a linie, nu este nevoie să se completeze tabela. Aceasta pentru că linia a 4-a coincide cu linia O, iar linia a 5-a cu linia 1. De aceea, în mod obligator linia a 6-a va coincide cu linia a 2-a (pentru că fiecare linie este determinată de cele două anterioare). Atunci linia a 7-a va coincide cu a 3-a, a 8-a cu a 4-a, a 9-a cu a 5-a ş.a.m.d. Liniile se repetă cu perioada 4 deci liniile cu număr $4k$ vor fi de forma $C\ C\ N\ N$;

liniile cu numărul $4k + 1$ vor fi de forma $N\ C\ C\ N$;

liniile cu numărul $4k + 2$ vor fi de forma $C\ N\ C\ N$;

liniile cu numărul $4k + 3$ vor fi de forma $C\ N\ C\ N$. În particular linia a 25-a $(25 = 6 \cdot 4 + 1)$ va fi de forma $N\ C\ C\ N$.

După ce s-au pus în tabelă literele C şi N, devine clar ce strategie trebuie să aleg Eu pentru ca să cîştig: de fiecare dată trebuie făcută acea mişcare care duce la o căsuţă cu litera C. Regula de aşezare a literelor C şi N indicată mai sus este făcută chiar aşa încît dacă Eu am ajuns o dată într-o căsuţă C, atunci în continuare Eu pot să ajung numai în căsuţe C şi adversarul nu are cum să mă împiedice.

Cazul în care Eu cîştig, dacă Eu am un număr impar de beţe la sfîrşit, se studiază în mod analog. Se poate pune în linia 0, $N\ N\ C\ C$ şi apoi să se com-

I	II	III	IV	V
0	C	C	N	N
1	N	C	C	N
2	C	N	C	N
3	C	N	C	N
4	C	C	N	N
5	N	C	C	N
6				

Perioada

Şablon

Fig. 22. Tabela cu stările cîştigătoare şi necîştigătoare pentru jocul cu m = 2

I	II	III	IV	V
0	C	C	N	N
1	N	C	C	N
2	C	N	C	N
3	C	N	C	N
4	N	N	C	C
5	C	N	N	C
6	C	N	C	N
7	C	N	C	N
8	C	C	N	N
9	N	C	C	N
10	C	N	C	N
11				

Perioadă

Şablon

Fig. 23. Tabela pentru jocul cu $m = 3$

pleteze tabela după aceeaşi regulă. Perioada va fi din nou 4. Dar se poate folosi acelaşi desen din figura 22.

Să facem remarca următoare: este echivalent ca unui jucător să nu-i dăm nici un băţ înainte de începerea jocului şi să-i cerem ca la sfîrşit să aibă un număr impar de beţe sau să-i dăm înainte de începerea jocului un băţ şi să-i cerem ca la sfîrşit să aibă un număr par de beţe. Astfel în cazul nou pe care-l cercetăm, Eu cîştig dacă în tabela din figura 22 în căsuţa de la intersecţia liniei a N-a cu coloana a IV-a este C, dacă Eu încep; coloana a V-a este C dacă El începe.

Fie acum $m = 3$. Tabela respectivă, ca şi mai înainte va fi formată din aceleaşi coloane. Şablonul se va schimba (fig. 23). Acum fiecare linie este determinată de cele trei linii anterioare. Pentru scrierea literelor C şi N aplicăm aceeaşi regulă de mai sus. Aşezînd literele ne convingem că perioada este formată din 8 linii. În particular, a 25-a linie, va coincide cu prima: N C C N.

Astfel în cazul $m = 3$ şi $N = 25$ se obţine următorul rezultat: dacă se consideră cîştigător cel care va avea un număr par de beţe, atunci cel care începe pierde, iar dacă se consideră cîştigător cel care va avea un număr impar de beţe atunci cel care începe va cîştiga.

Cazul general se studiază în mod analog. Lungimea perioadei se dovedeşte egală cu $m + 2$ dacă m este par şi cu $2m + 2$ dacă m este impar. Aceste perioade sînt reprezentate în figurile 24 a şi b. Şabloanele care sînt date pentru $m = 8$ şi $m = 9$ permit să se înţeleagă cum vor fi şabloanele pentru cazul general. Căsuţele colorate în anumită culoare reprezintă stările în care poate ajunge jucătorul din căsuţa în care este un punct de aceeaşi culoare. Regula de aşezare a literelor C şi N este aceeaşi de mai sus. Propunem cititorilor să verifice că perioadele sînt într-adevăr cele date mai sus. Facem numai remarca următoare că pentru a fi siguri că perioada se va repeta trebuie să se verifice aşezarea literelor în toate liniile primei perioade şi în primele m linii ale celei de a doua perioade.

Cum se vede, pentru m mare cel mai adesea cel care începe acela şi cîştigă. Toate literele care strică această regulă în figurile 24 a, b sînt încercuite. Astfel că cel care începe va pierde numai în următoarele cazuri

	Cîştigă cel care are un număr par	Cîştigă cel care are un număr impar
m par	N dă restul 1 la împărţirea cu $m + 2$	N dă restul $m + 1$ sau 0 la împărţirea cu $m + 2$
m impar	N dă restul 1 sau $m + 1$ la împărţirea cu $2m + 2$	N dă restul 0 sau $m + 2$ la împărţirea cu $2m + 2$

I	II	III	IV	V
0	C	Ⓒ	Ⓝ	N
1	Ⓝ	Ⓒ	C	N
2	C	N	C	N
⋮	C	N	C	N
m	C	N	C	N
m+1	C	N	Ⓝ	Ⓒ

a

Fig. 24. a. Tabela cu jocul cu m par şi şablonul pentru m = 8

I	II	III	IV	V
0	C	Ⓒ	Ⓝ	N
1	Ⓝ	Ⓒ	N	C
2	C	N	C	N
⋮	C	N	C	N
m	C	N	C	N
m+	Ⓝ	N	C	C
m+2	C	N	Ⓝ	Ⓒ
m+3	C	N	C	N
⋮	C	N	C	N
2m+1	C	N	C	N

b

Fig. 24. b. Tabela cu jocul pentru m impar şi şablonul pentru m = 9

M 9. *Considerăm următoarele proprietăţi ale unui tetraedru (tetraedrul este o piramidă triunghiulară oarecare):*

a) toate feţele sînt echivalente;
b) fiecare muchie este congruentă cu cea opusă;
c) toate feţele sînt congruente;
d) centrele sferelor înscrisă, respectiv circumscrisă, coincid;
e) sumele unghiurilor plane de la fiecare vîrf al tetraedrului sînt aceleaşi.

Să se demonstreze că toate aceste proprietăţi sînt echivalente. Încercaţi să găsiţi şi alte proprietăţi echivalente cu ele.

Rezolvare. În această problemă este foarte important să se găsească o cale raţională de demonstraţie, să se analizeze care proprietate din care rezultă uşor (vom folosi în loc de cuvintele „din ... rezultă..." săgeata $\Rightarrow$).

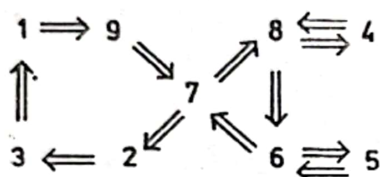
Este util să mai adăugăm citeva proprietăţi ale tetraedrului:

f) suma unghiurilor plane de la oricare vîrf este egală cu 180°;

g) desfăşurarea tetraedrului este un triunghi ascuţitunghic în care sînt duse liniile mijlocii (fig. 25);

h) toate feţele sînt triunghiuri ascuţitunghice cu cercuri circumscrise de aceeaşi rază;

i) proiecţiile tetraedrului pe fiecare dintre cele trei plane paralele cu două muchii opuse sînt dreptunghiuri. Aceste proprietăţi şi cele din text, — pe care le vom numerota de la 1 la 9 — sînt echivalente, iar demonstraţia o vom face în următoarea ordine:



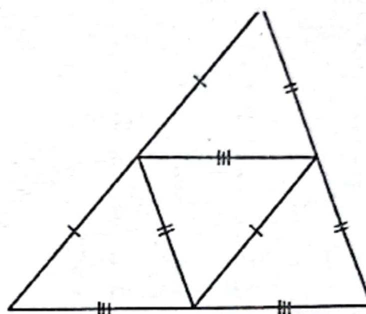


Fig. 25

Majoritatea dintre cele 12 teoreme indicate de săgeţi sînt evidente. Le demonstrăm pe rînd.

(5) ⇒ (6). Suma măsurilor tuturor unghiurilor plane ale tuturor feţelor tetraedrului este egală cu suma măsurilor unghiurilor a patru triunghiuri, adică $4 \cdot 180° = 720°$, de aceea, dacă sumele măsurilor unghiurilor la fiecare vîrf sînt egale, rezultă că fiecare dintre ele este egală cu 180°. Invers, (6) ⇒ (5) este evident.

(4) ⇒ (8) Dacă R este raza sferei circumscrisă tetraedrului şi r raza sferei înscrisă în tetraedru şi centrele acestor sfere coincid, atunci punctul de tangenţă al sferei înscrise cu fiecare faţă va fi situat în interiorul feţei şi va fi depărtat de fiecare vîrf al triunghiului cu $\sqrt{R^2 - r^2}$, adică va fi centrul cercului circumscris acestui triunghi, de rază $\sqrt{R^2 - r^2}$.

(8) ⇒ (4). Este clar că în orice tetraedru, perpendicularele duse din centrul O al sferei circumscrise pe feţe cad în centrele cercurilor circumscrise şi dacă razele tuturor acestor cercuri sînt R_1, atunci punctul O este egal depărtat de toate feţele (cu distanţa $r = \sqrt{R^2 - R_1^2}$). Dacă picioarele perpendicularelor sînt situate în interiorul feţelor, atunci O este centrul sferei înscrise de rază r.

(8) ⇒ (6). Dacă razele cercurilor circumscrise feţelor ABC şi DBC sînt congruente, atunci $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$, întrucît aceste unghiuri cuprind arce congruente în cercuri congruente (aici este esenţial faptul că $\triangle BAC$ şi $\triangle BDC$ sînt ascuţitunghice!). Acest lucru se referă şi la celelalte perechi de feţe vecine.

Astfel, $\sphericalangle BDC + \sphericalangle CDA + \sphericalangle ADB = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB = 180°$ şi analog pentru celelalte vîrfuri.

(6) ⇒ (7). Dacă desfăşurăm un tetraedru oarecare $ABCD$, obţinem un hexagon $D_1AD_2BD_3C$ (fig. 26), care este descompus în patru triunghiuri. Evident că din (6) rezultă că segmentele D_1A şi AD_2, D_2B şi BD_3, D_3C şi CD_1 sînt situate pe o dreaptă, adică punctele A, B şi C sînt mijloacele laturilor triunghiului $D_1D_2D_3$ (ca în figura 25). Acest triunghi este ascuţitunghic, fiindcă

într-un unghi triedru al tetraedrului (la vîrful D) fiecare dintre unghiurile plane este mai mic decît suma celorlalte două.

(9) $\Rightarrow$ (7), (7) $\Rightarrow$ (8) şi (7) $\Rightarrow$ (2) sînt evidente. (2) $\Rightarrow$ (3) de asemenea este evidentă (cazul de congruenţă după cele trei laturi); (3) $\Rightarrow$ (1) este evident.

A rămas de demonstrat că (1) $\Rightarrow$ (9). Acest lucru este mai dificil.

(1) $\Rightarrow$ (9). Să observăm că dacă p_1 şi p_2 sînt plane paralele, AK şi BH două segmente ale căror capete A şi B sînt situate în planul p_1, iar capetele K şi H în planul p_2, atunci segmentele AK şi BH sînt congruente atunci şi numai atunci cînd sînt congruente proiecţiile lor pe planul p_1 (sau p_2). Acest lucru se demonstrează uşor cu ajutorul teoremei lui Pitagora (fig. 27).

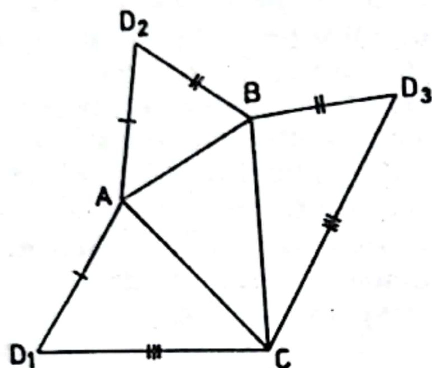


Fig. 26

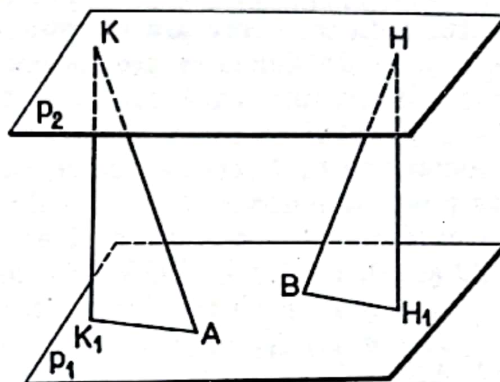
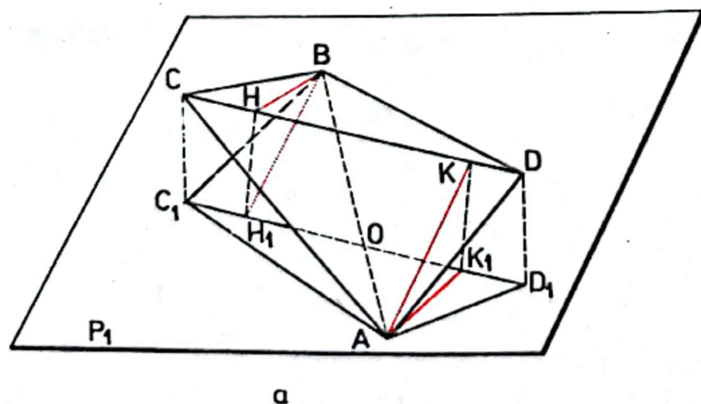


Fig. 27

Vom duce planele paralele p_1 şi p_2 prin muchiile AB şi CD ale tetraedrului. Fie C_1 şi D_1 proiecţiile punctelor C şi D pe planul p_1 (fig. 28, a), O punctul de intersecţie dintre C_1D_1 şi AB. Dacă ariile $\triangle CAD$ şi $\triangle CBD$ sînt egale, atunci sînt congruente înălţimile AK şi BH ale acestor triunghiuri, prin urmare sînt congruente proiecţiile acestor înălţimi pe planul p_1; $AK_1 = BH_1$ şi de aceea $AO = OB$ (fig. 28, b) de unde rezultă în particular că punctele A şi B sînt situate de părţi diferite ale dreptei C_1D_1. Analog, întrucît ariile $\triangle ACB$ şi $\triangle ADB$ sînt egale, rezultă că $C_1O = D_1O$. Prin urmare AC_1BD_1 este paralelogram, adică $AC_1 = BD_1$ şi $C_1B = D_1A$, de unde $AC = BD$ şi $BC = AD$. La fel se demonstrează că $AB = CD$ deci AC_1BD_1 este paralelogram.



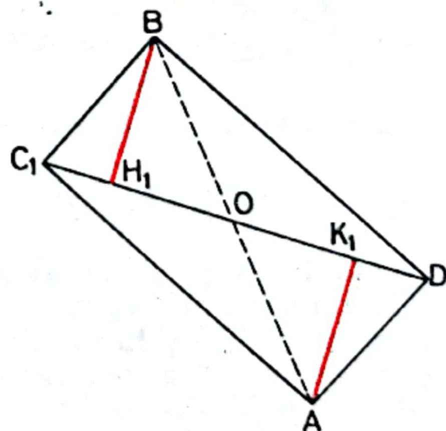


Fig. 28, a. Tetraedrul în spaţiu

Fig. 28, b. Proiecţia tetraedrului pe plan

M 10. *Patru cercuri care au centrele în vîrfurile unui patrulater convex acoperă în întregime acest patrulater. Să se demonstreze că dintre ele se pot alege trei cercuri care să acopere triunghiul cu vîrfurile în centrele acestor cercuri.*

G. Galperin

R e z o l v a r e. Principala dificultate în această problemă este să se găsească acel raționament care să cuprindă toate cazurile posibile de așezare a cercurilor și să țină cont de toate formele posibile ale patrulaterului.

Ideea rezolvării aparține lui N. Vasiliev. Vom nota cercurile cu centrele A, B, C, D în vîrfurile patrulaterului dat $ABCD$ prin C_A, C_B, C_C, C_D de raze, respectiv r_A, r_B, r_C, r_D. Să presupunem că afirmația problemei nu este adevărată. Atunci fiecare cerc are un punct comun cu o parte din triunghiul opus lui neacoperit de celelalte trei cercuri; de exemplu, C_A trebuie să conțină punctele triunghiului BCD neacoperite de nici unul dintre cercurile C_B, C_C, C_D. Fie O punctul de intersecție a diagonalelor. Vom demonstra în presupunerea noastră că $r_A \geqslant OA$, adică cercul C_A conține punctul O. Restul este clar: la fel se poate demonstra că punctul O aparține lui C_B și C_C și de aici rezultă în mod evident că aceste cercuri acoperă triunghiul ABC. Să privim la figurile 29 și 30: dacă OL și ON sînt perpendicularele duse pe dreptele AB și BC, atunci C_A acoperă triunghiul AOL, C_C acoperă triunghiul OCN, C_B triunghiul OBL și OBN, iar aceste patru triunghiuri dreptunghice acoperă triunghiul ABC chiar dacă unul dintre triunghiurile AOB sau OBC (fig. 30) este obtuzunghic.

Ajungem la o contradicție, prin urmare afirmația problemei este adevărată. Astfel a rămas de demonstrat că $r_A \geqslant OA$. Ne este utilă următoarea lemă aproape evidentă.

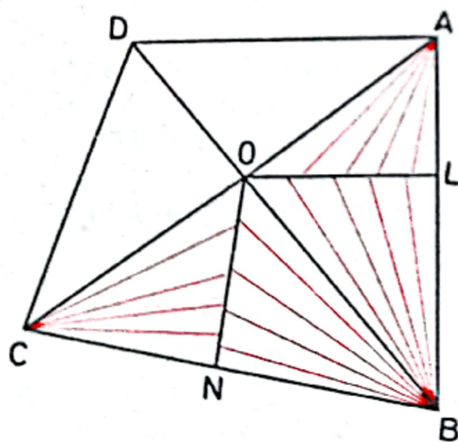


Fig. 29

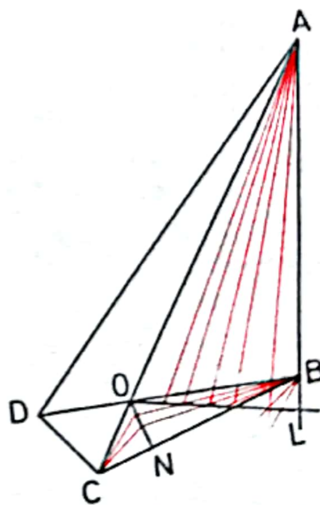


Fig. 30

L e m ă. Se dă patrulaterul convex $PQRS$ și cercul C_R (care nu conține triunghiul PQR în întregime). Atunci dintre toate punctele situate în interiorul triunghiului PQR și în exteriorul lui C_R mai aproape de punctul S va fi:

a) piciorul F al perpendicularei SF coborîtă din punctul S pe dreapta PR, dacă acest punct F este situat în exteriorul cercului C_R (fig. 31, a);

b) punctul E de intersecție a cercului C_R cu segmentul PR, dacă punctul F este situat în interiorul lui C_R (fig. 31, b). (Aici este important că unghiul QRS al patrulaterului este mai mic decît 180°; demonstrația lemei este lăsată cititorului.)

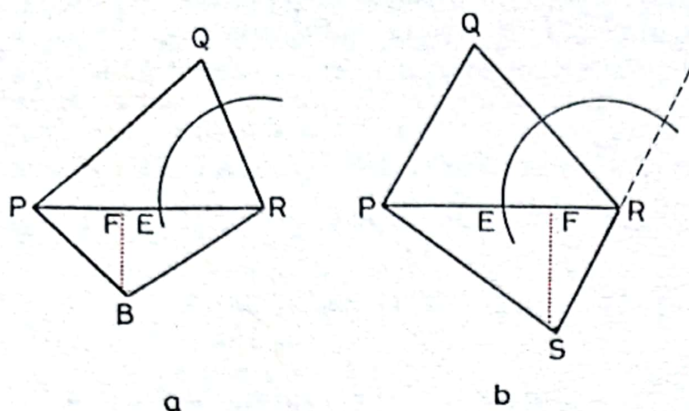


Fig. 31

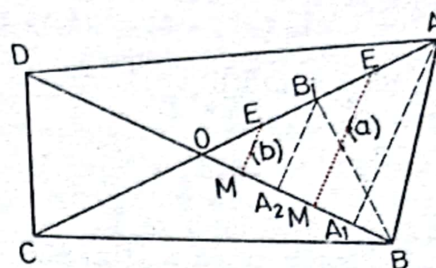


Fig.. 32

Se poate considera că $\angle AOB \leqslant 90°$ (altfel am lua pe D nu pe B). Fie $BB_1 \perp AC$; $AA_1 \perp BD$; $B_1A_2 \perp BD$ (fig. 32). Să presupunem că $r_A < OA$ și E este cel mai apropiat punct al lui C_A de O (el este situat pe segmentul OA) și $AE = r_A$, EM este perpendiculara coborîtă din E pe BD. Este evident că $AM > AE$. Vom demonstra că $r_A > AM$ de unde va rezulta că presupunerea noastră ($r_A < OA$) nu este adevărată.

Vom demonstra la început că $r_B > BM$. Aplicăm lema triunghiului ACD și cercului C_A și punctului B. Vom considera două cazuri:

a) E este situat între A și B_1. Atunci $r_B > BB_1 > BA_2 \geqslant BM$;

b) E este situat între O și B_1. Atunci (conform lemei) $r_B > BE > BM$.

Astfel, știm că punctul M aparține lui C_B. Aplicînd lema triunghiului BCD, cercului C_B și punctului A (observăm că M este situat între O și A_1, așa că are loc totdeauna cazul b)) obținem că $r_A > AM$. Cercul raționamentelor s-a închis, s-a obținut contradicția necesară.

M 11. *Pe 44 de copaci așezați în cerc sînt 44 de scatii zglobii (pe fiecare copac cîte unul). Din timp în timp doi scatii zboară deodată pe copacii alăturați, în sensuri contrare (unul în sensul acelor ceasului, celălalt în sens contrar, vezi fig. 33). Să se demonstreze că scatii nu se strîng într-un singur copac niciodată.*

Dar dacă sînt n copaci și n scatii?

Problemă dată la Școala serală de matematică de pe lîngă Universitatea de Stat din Moscova.

R e z o l v a r e. Vom rezolva problema direct pentru n scatii și n copaci. Vom numerota copacii în ordine (să zicem în sensul acelor ceasului (fig. 33) de la 1 la 44. Vom nota numărul de scatii aflați la un moment dat pe al k-lea copac prin a_k (pe primul copac a_1, pe al doilea a_2 ș.a.m.d.). Să considerăm expresia

$$S = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \dots + k \cdot a_k + \dots + n \cdot a_n.$$

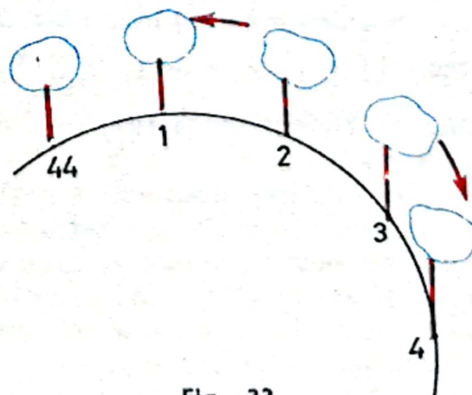


Fig. 33

Vom arăta că dacă doi scatii zboară pe copacii vecini, în sensuri opuse, atunci S sau rămîne neschimbată sau se modifică cu n.

Într-adevăr, să presupunem că un scatiu zboară de pe copacul al k-lea pe copacul vecin (în sensul acelor ceasului). Atunci în suma S se schimbă doi termeni. Dacă $k < n$, atunci se modifică termenul al k-lea și al $k + 1$-lea și suma lor devine

$$k \cdot (a_k - 1) + (k + 1)(a_{k+1} + 1) = ka_k + (k + 1)a_{k+1} + 1$$

adică s-a mărit cu 1. Dacă $k = n$, atunci se modifică termenul al n-lea și primul și suma lor

$$n(a_n - 1) + 1 \cdot (a_1 + 1) = na_n + 1 \cdot a_1 - (n - 1)$$

s-a micșorat cu $n - 1$.

Invers, dacă scatiul zboară în sens contrar acelor ceasului, atunci suma S se micșorează cu 1 sau se mărește cu $n - 1$. De aceea, cînd amîndoi scatiii zboară pe copacii vecini (unul într-un sens, celălalt în alt sens) suma S sau nu se modifică, sau se modifică cu n.

În momentul inițial, pe fiecare copac stătea cîte un singur scatiu, deci:

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + \ldots + n \cdot 1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Astfel că după un număr oarecare de zboruri suma va fi egală cu $\frac{n(n+1)}{2} + pn$, unde p este un număr întreg. Dacă scatiii s-ar putea strînge pe un singur copac, să zicem al q-lea, atunci suma S ar trebui să fie egală cu nq deci ar trebui să fie satisfăcută egalitatea

$$\frac{n(n+1)}{2} + np = nq, \text{ de unde } n + 1 + 2p = 2q, \text{ adică } n = 2(q - p) - 1.$$

Astfel că, dacă n este par, de exemplu 44, scatiii nu se pot strînge pe un singur copac. Vom demonstra că pentru n impar acest lucru se poate. (Necesitatea acestei etape a demonstrației poate nu este clară pentru toți. Să facem o analiză mai amănunțită. Ce am demonstrat pînă acum? Numai faptul că dacă scatiii reușesc să se strîngă pe un singur copac, numărul lor este în mod obligatoriu impar (aceasta este o condiție necesară). Acum trebuie demonstrat că această condiție este și suficientă, adică dacă numărul lor este impar, atunci ei se pot aduna pe un singur copac.)

Să considerăm situația inițială cînd pe fiecare copac este cîte un scatiu, vom „ordona“ unui scatiu să stea pe loc și-l vom numi „nemișcat“. Împărțim ceilalți scatii în perechi, astfel încît într-o pereche să fie doi scatii situați la distanțe egale de cel nemișcat, de o parte și de alta a lui. Dacă notăm această distanță prin r, $r = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$ (adică r distanțe dintre copaci), atunci după r zboruri această pereche poate ajunge pe copacul în care este scatiul nemișcat.

Rezolvarea dată este tipică pentru problemele în care se cere să se stabilească dacă în urma anumitor transformări se poate obține un anumit rezultat. În cazul nostru, transformarea este zborul celor doi scatii, în sensuri contrare și vrem să stabilim dacă în final ei se pot strînge pe un copac. Pentru ca să se demonstreze că se p o a t e, este suficient să se dea un exemplu de cum se realizează acest lucru. Pentru ca să se demonstreze că n u se p o a t e obține rezultatul cerut, adesea este util să se procedeze astfel: se găsește o

anumită mărime care rămîne neschimbată la toate transformările şi pentru care valoarea inițială se deosebeşte de valoarea cerută în situaţia finală (o astfel de mărime se numeşte **invariantul** transformărilor respective). În problema noastră această mărime este restul împărțirii sumei S prin n.

Este interesant să ne ocupăm şi de unele chestiuni mai generale în legătură cu problema. Fie date două aşezări a unui număr de a scatii pe n copaci. Le vom numi echivalente dacă dintr-una se poate obține cealaltă (prin zborurile indicate în textul problemei). Cum se poate afla dacă aceste aşezări sînt sau nu echivalente? (fără a face toate transformările). Încă o chestiune. Este evident că mulțimea tuturor aşezărilor posibile a unui număr de a scatii pe n copaci se împart în cîteva clase de echivalență. Cîte clase vor fi?

Să stabilim cîte aşezări neechivalente sînt posibile. Vom renumerota copacii distincți prin $0, 1, 2, ..., n - 1$ (este neesențial că am ales această numerotare şi nu cea folosită pînă acum $1, 2, ...$) şi vom nota prin a_k numărul scatiilor pe copacul al k-lea. Am demonstrat mai sus faptul că restul împărțirii prin n a sumei $a_1 + 2a_2 + ... + (n - 1)a_{n-1}$ (notăm acest rest prin r) nu se schimbă la zborul scatiilor şi de asemenea nu se schimbă numărul total al scatiilor $a_0 + a_1 + ... + a_{n-1} = a$. Deci, dacă două aşezări sînt echivalente, atunci au aceleaşi valori pentru a şi r. Să demonstrăm că, reciproc, dacă la două aşezări a unui număr de a scatii pe n copaci, valoarea lui r este aceeaşi, ele sînt echivalente. Anume, vom demonstra că fiecare aşezare cu un anumit r dat poate fi adusă prin zborurile scatiilor la următoarea aşezare: toți scatiii s-au aşezat pe copacul cu numărul 0, afară de unul care s-a aşezat pe copacul cu numărul r.

Aceasta se face uşor. Vom alege pe un scatiu pe care-l vom numi „zburătorˮ şi vom aduce pe fiecare dintre ceilalți scatii pe copacul cu numărul 0, punîndu-l în pereche cu „zburătorulˮ pe care-l deplasăm mereu în sensul necesar. Ultima poziție a „zburătoruluiˮ va determina numărul r.

Astfel, mulțimea tuturor aşezărilor posibile ale unui număr de a scatii pe n copaci este formată din n clase de echivalență ($r = 0, 1, ... n - 1$).

M 12. *Ce patrulatere pot să fie tăiate de o dreaptă în două patrulatere asemenea între ele?*

Rezolvare. Vom demonstra că de această proprietate se bucură numai trapezul şi paralelogramul.

Să presupunem că patrulaterul $ABCD$ este tăiat de o dreaptă în două patrulatere asemenea. Este evident că această dreaptă va tăia două laturi opuse ale patrulaterului. Să presupunem că taie laturile AD în K şi BC în L (fig. 34). În continuare vom folosi de mai multe ori această afirmaţie evidentă: dacă două patrulatere $EFGH$ şi $PQRS$ sînt asemenea şi vîrful E se corespunde cu vîrful P, atunci $\sphericalangle E = \sphericalangle P$, $\sphericalangle G = \sphericalangle R$ şi, sau $\sphericalangle F = \sphericalangle Q$ şi $\sphericalangle H = \sphericalangle S$ sau $\sphericalangle F = \sphericalangle S$ şi $\sphericalangle Q = \sphericalangle H$.

Astfel, să presupunem că patrulaterele $ABLK$ şi $CDKL$ sînt asemenea (ne este util doar faptul că unghiurile corespunzătoare sînt congruente) şi să demonstrăm că în patrulaterul $ABCD$ anumite două laturi vor fi paralele. Unghiul α al patrulaterului $ABLK (\sphericalangle\alpha = \sphericalangle AKL)$ poate să corespundă la unul dintre unghiurile patrulaterului $KLCD$.

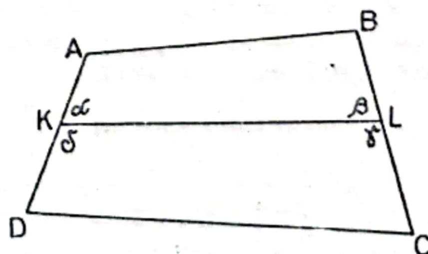


Fig. 34

1) $\sphericalangle\alpha$ corespunde la $\sphericalangle D$. Atunci $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle D$, $\sphericalangle\gamma = \sphericalangle B$, $AB \| KL \| CD$.

2) $\sphericalangle\alpha$ corespunde la $\sphericalangle C$. Atunci $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle C$, $\sphericalangle\delta = \sphericalangle B$; $\sphericalangle B + \sphericalangle C = \sphericalangle\alpha + \sphericalangle\delta = 180°$, $AB \| CD$; atunci $\sphericalangle A = \sphericalangle\gamma$, $\sphericalangle D = \sphericalangle\beta$ (cazul $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\gamma$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D$ nu trebuie considerat separat întrucît rezultă $\sphericalangle\beta + \sphericalangle\gamma = 180°$ și $\sphericalangle A = \sphericalangle D = \sphericalangle\beta = \sphericalangle\gamma = 90°$).

3) $\sphericalangle\alpha$ corespunde la $\sphericalangle\gamma$. Atunci $\sphericalangle B = \sphericalangle D$, $AD \| BC$ și $AB \| DC$ adică $ABCD$ este paralelogram.

4) $\sphericalangle\alpha$ corespunde la $\sphericalangle\delta$. Atunci $\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\delta = 90°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ și fie că $\sphericalangle\beta = \sphericalangle\gamma = 90°$, $AD \| BC$ (trapez isoscel sau dreptunghi), fie $\sphericalangle\beta = \sphericalangle D$, $\sphericalangle\gamma = \sphericalangle A$, $\sphericalangle A + \sphericalangle D = 180°$, $AB \| CD$ și, abstracție făcînd de notații, acest caz coincide cu cazul 2).

Am demonstrat că $ABCD$ este paralelogram sau trapez. Se vede ușor că, reciproc, orice paralelogram sau trapez se poate împărți în două patrulatere asemenea. Paralelogramul este împărțit de orice dreaptă care trece prin centrul său în două paralelograme congruente (dacă dreapta nu este o diagonală). Trapezul cu bazele $a < b$, este împărțit în două trapeze asemenea de o dreaptă paralelă cu bazele și care împarte înălțimea în raportul $\sqrt{b}/\sqrt{a}$; desigur că trebuie să se verifice că laturile corespunzătoare sînt proporționale (fig. 35): $AK/KD = BL/LC = AB/KL = KL/DC = \sqrt{b}/\sqrt{a}$. Încercați să vedeți cum se poate împărți un trapez în două patrulatere asemenea, într-un mod mai deosebit, corespunzător cazului 2), așa cum se vede în figura 36, (răspuns: acest lucru se poate face atunci și numai atunci cînd $\sqrt{a}/\sqrt{b} < \sin\alpha/\sin\beta$, unde α, β sînt unghiurile de la baza mare b).

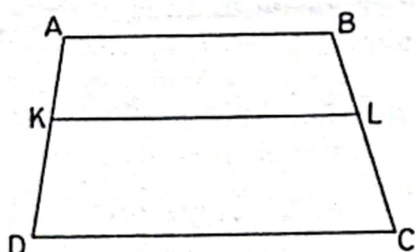


Fig. 35

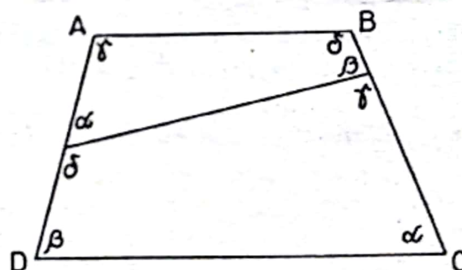


Fig. 36

M 13. *Să se demonstreze că dacă diferența dintre cel mai mare și cel mai mic dintre cele n numere reale $a_1, a_2, \dots, a_n$ este egală cu d, iar suma modulelor celor $\frac{n(n-1)}{2}$ diferențe reciproce dintre aceste numere*

$$\sum_{i<j} |a_i - a_j|$$

este egală cu s, atunci

$$(n-1)d \leqslant s \leqslant \frac{n^2}{4} d.$$

R e z o l v a r e. Să punem punctele $a_1, a_2, \dots, a_n$ pe axa reală. Atunci d este distanța dintre punctele extreme, cel mai din stînga și cel mai din dreapta, iar $s = \sum_{i<j} |a_i - a_j|$ este suma tuturor distanțelor reciproce dintre puncte.

Evident că se poate considera că punctele au fost notate în ordinea crescătoare a absciselor respective $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$ (fig. 37).

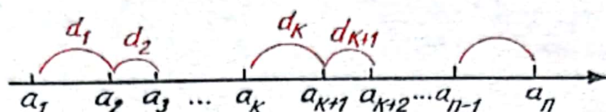


Fig. 37

Vom nota distanța dintre punctele vecine a_k și a_{k+1} prin $d_k (k = 1, 2, \dots, n-1)$. Evident că $d = d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1}$.

Vom exprima acum pe s prin mărimile d_k. Pentru aceasta, vom înlocui în suma s lungimea fiecărui segment $[a_i - a_j]$ prin suma acelor distanțe d_k din care este format. Este evident că d_k intră în acele segmente în care capătul din stînga este în unul dintre punctele $a_1, \dots, a_k$, iar capătul din dreapta în unul dintre punctele $a_{k+1}, \dots, a_n$, adică în total d_k intră în sumă de $k(n-k)$ ori. De aceea

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)d_k \cdot$$

Acum, inegalitatea care trebuie demonstrată rezultă din două inegalități cu totul elementare: pentru orice $k = 1, 2, \dots n-1$

1) $k(n-k) \geqslant n-1 \Leftrightarrow kn - k^2 - n + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (k-1)(n-k-1) \geqslant 0$;

2) $k(n-k) \leqslant \frac{n^2}{4} \Leftrightarrow n^2 - 4nk + 4k^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (n-2k)^2 \geqslant 0$.

Folosind aceste evaluări, obținem

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)d_k \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} (n-1)d_k = (n-1)d,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)d_k \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^2}{4} d_k = \frac{n^2}{4} d.$$

Este interesant de văzut dacă evaluarea este suficient de bună, adică dacă, de exemplu, nu s-ar putea înlocui, să zicem, $n-1$ din membrul stîng cu un număr mai mare? Pentru ca să ne convingem de contrariu este suficient să se dea un exemplu în care inegalitatea se transformă în egalitate (în ambii termeni sînt numere pozitive). Acest exemplu se găsește ușor, dacă ne gîndim la demonstrația făcută. Trebuie să așezăm punctele $a_1, \dots, a_n$ astfel încît toți d_k, în afară de primul d_1, să fie nuli, adică să se ia $a_1 < a_2 = a_3 = \dots = a_n$. Atunci $s = (n-1)d_1 = (n-1)d$.

În ceea ce privește a doua inegalitate $s \leqslant \frac{n^2}{4} d$, atunci cînd n este par, $n = 2m$ se poate realiza egalitatea (se iau $a_1 = a_2 = \dots = a_m < a_{m+1} = \dots = a_{2m}$), iar pentru n impar, $n = 2m + 1$, se poate întrucîtva îmbunătăți: se vede ușor că pentru n impar, cel mai mare dintre numerele $k(n-k)$ este egal cu $\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{4}$ (demonstrați acest lucru riguros!) și atunci

se poate demonstra inegalitatea mai tare $s < \frac{n^2 - 1}{4} d$. Egalitatea se atinge dacă $a_1 = \ldots = a_m < a_{m+1} = \ldots = a_{2m+1}$.

M 14. *Un poliedru convex alb este vopsit cu negru pe unele fețe astfel încît două fețe negre nu au o muchie comună (fig. 38). Să se demonstreze că dacă este îndeplinită cel puțin una dintre următoarele condiții:*

a) fețele negre sînt mai multe decît jumătate din numărul fețelor;

b) aria fețelor negre este mai mare decît jumătate din aria poliedrului. Atunci în acest poliedru nu se poate înscrie o sferă.

Rezolvare. Începem cu b). Să presupunem că în poliedru s-a putut înscrie o sferă. Marcăm pe fiecare față punctul de tangență cu sfera și ducem din el segmente la toate vîrfurile acestei fețe. Atunci fața se împarte în triunghiuri. La fiecare muchie a poliedrului apar două astfel de triunghiuri situate în fețe vecine. Ele sînt triunghiuri congruente (după laturi, folosindu-ne de faptul că două tangente duse din același punct la o sferă sînt congruente). După ipoteză fiecare muchie aparține numai unei fețe negre. Astfel că fiecărui triunghi negru îi corespunde un triunghi alb (dar unui triunghi alb îi poate corespunde tot un triunghi alb, este important doar că la triunghiuri negre diferite corespund triunghiuri albe diferite). Prin urmare, suma ariilor fețelor negre nu este mai mare decît suma ariilor fețelor albe. Punctul b) este rezolvat.

La fel se rezolvă și punctul a). Presupunem că am putut înscrie o sferă într-un poliedru care are unele fețe negre nevecine și numărul acestora — să-l notăm prin f_n — este mai mare decît numărul fețelor albe, să-l notăm prin f_a. Considerăm pe fiecare față punctul de tangență cu sfera și-l unim cu vîrfurile feței (fig. 39). Triunghiurile $B_1O'B_2$ și $B_1O''B_2$ sînt congruente (după laturi) ca atare $\sphericalangle B_1O'B_2 = \sphericalangle B_1O''B_2$. Suma unghiurilor din jurul lui O' este 2π. Rezultă că, pe de o parte, suma unghiurilor „la centru“ din toate fețele negre, egală cu $2\pi f_n$, este mai mare decît suma unghiurilor analoage din fețele albe $2\pi f_a$ căci $f_n > f_a$, iar pe de altă parte, cum unui unghi negru îi corespunde sigur un unghi alb, dar mai există și unghiuri albe care se corespund între ele (căci fețele albe pot să fie vecine), rezultă că $2\pi f_n < 2\pi f_a$. Contradicția obținută demonstrează afirmația.

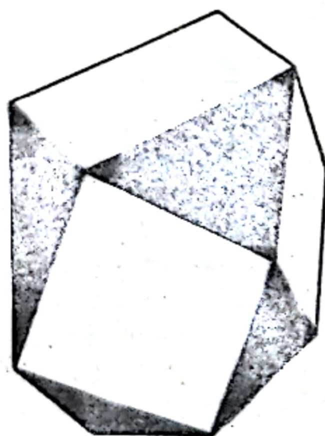


Fig. 38

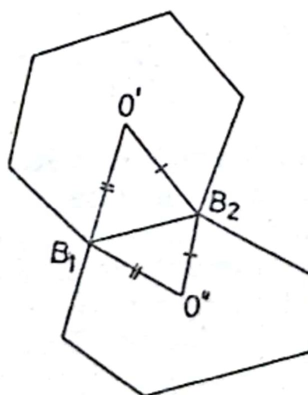


Fig. 39

Deși în problemă este vorba de poliedre care admit sau nu o sferă înscrisă, putem să reformulăm textul pentru poliedre înscrise într-o sferă. Legătura dintre aceste două tipuri de poliedre convexe este un exemplu de ceea ce matematicienii numesc „dualitate“. Dacă avem un poliedru convex înscris într-o sferă, ducem plane tangente la sferă în vîrfurile acestuia. Planele tangente

în vîrfurile unei aceleiaşi feţe se întîlnesc într-un punct (demonstraţi!) care este un vîrf al poliedrului circumscris. În acest limbaj „dual" o parte din textul problemei se transfomă în Teorema lui Steinitz (1927). *Să presupunem că vîrfurile unui poliedru convex sînt albe şi negre astfel încît:*

I. *Două vîrfuri negre nu sînt pe aceeaşi muchie.*

II. *Numărul vîrfurilor negre este mai mare decît al vîrfurilor albe.*

Atunci poliedrul nu se poate înscrie într-o sferă.

Propunem cititorilor să stabilească poliedrele duale pentru un cub, o prismă regulată cu n laturi, o piramidă regulată cu n laturi, un trunchi de piramidă regulată, un dodecaedru înscrise într-o sferă.

M 15. *Un tablou pătrat $n \times n$ este completat cu numere întregi nenegative astfel încît suma numerelor pe fiecare linie şi pe fiecare coloană este egală cu 1. Să se demonstreze că din tablou se pot alege n numere pozitive, astfel încît oricare două dintre ele nu sînt nici pe aceeaşi linie nici pe aceeaşi coloană.*

Rezolvare. Să observăm la început că, dacă permutăm între ele liniile (sau coloanele) tabloului, acest lucru nu influenţează nici asupra ipotezei nici asupra concluziei. Să presupunem că prin permutarea liniilor şi coloanelor am format în colţul din dreapta sus de dimensiuni $m + k$ numai elemente nule (fig. 40). Vom demonstra că $m + k$ este totdeauna mai mic decît n. Să calculăm suma numerelor din partea notată în tablou cu C. E evident că suma numerelor din partea notată cu B este egală cu m (m coloane în fiecare dintre ele suma este egală cu 1). În mod analog suma numerelor din partea notată cu A este egală cu k (k linii). Fiindcă suma totală a tuturor numerelor din tablou este egală cu n, rezultă că în porţiunea C suma numerelor valorează $n - m - k$. Acest număr este nenegativ, fiindcă din ipoteză toate numerele din tablou sînt nenegative. Astfel $n - m - k \geqslant 0$, adică $m + k \leqslant n$ ceea ce trebuia demonstrat.

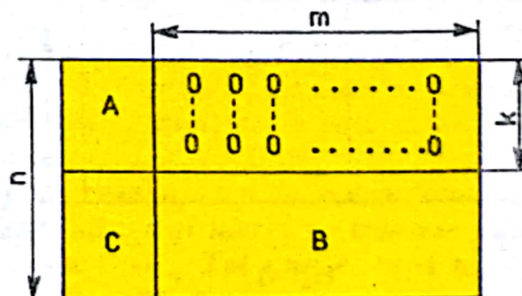


Fig. 40

Acum putem să reformulăm problema astfel: se dă un tablou $n \times n$ cu numere şi se ştie că nici o permutare a liniilor sau coloanelor nu poate pune în evidenţă un colţ format numai din zerouri, de dimensiuni $m \times k$ astfel încît $m + k > n$; să se demonstreze că se pot alege n numere nenule astfel încît oricare două dintre ele nu sînt situate pe aceeaşi linie sau pe aceeaşi coloană (Nu este acum important că numerele sînt pozitive şi că suma pe linii sau pe coloane este egală cu 1. Aceste condiţii le-am folosit deja.) În continuare vom distinge numai între „nul" şi „nenul". Această reformulare arată că problema se poate reduce în limbajul „tabelelor" la „teorema peţitorilor": Presupunem că n băieţi sînt prieteni cu nişte fete. Să presupunem că pentru fiecare grupă formată din k băieţi ($k = 1, 2, ..., n$) există cel puţin k fete care au prieteni printre aceşti băieţi. Atunci fiecare băiat se poate căsători cu o fată pe care o cunoaşte. (Acest text glumeţ se găseşte la sfîrşitul unei serioase cărţi de analiză funcţională: K. Morey-Metode în spaţiul Hilbert.)

Într-adevăr, să scriem pe liniile tabloului $n \times n$, băieţii iar pe coloane fetele (eventual şi altele dacă cele de la început nu sînt în număr de n). La

intersecţia dintre linia s şi coloana t, vom pune „nenul" (o steluţă) dacă băiatul s se cunoaşte cu fata t şi „nul" dacă nu se cunosc. Obţinem un tablou (matrice) de cunoştinţe.

	Ana	Bela	Coca	Dana	Eva	Fifi
Ghiţă	0	*	*	0	*	0
Horia	*	0	0	*	0	0
Ion	0	0	*	0	*	0
Jan	0	0	0	0	*	0
Luca	0	0	0	0	*	0
Mihai	0	0	0	0	*	0

Tabloul cunoştinţelor, pentru $n = 6$

Vom lua o grupă arbitrară formată din k băieţi. Îi vom aşeza pe primele linii. Dacă cu o anumită fată nici unul dintre aceşti băieţi nu se cunoaşte, în respectiva coloană şi în primele k linii va fi pus 0. Dacă toate coloanele corespunzătoare acestor fete le aşezăm pe ultimele locuri (fie numărul lor m) atunci vom obţine un colţ format din 0 de dimensiuni $m \times k$ (fig. 41). În fiecare dintre primele $m - n$ coloane este cel puţin cîte un „nenul" în primele linii fiindcă respectiva fată are prieteni printre cei k băieţi aleşi. Fiindcă $m + k \leqslant n$, atunci $n - m \geqslant k$, adică numărul acestor fete nu e mai mic decît k. Vedem astfel că problema noastră coincide cu „teorema peţitorilor". Alegerea celor n soţii pentru cei n tineri este chiar alegerea celor n numere nenule situate în linii şi coloane diferite.

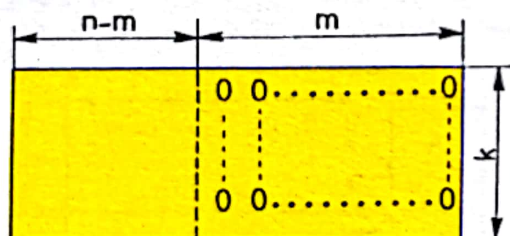


Fig. 41

Demonstraţia se poate face prin inducţie. Pentru $n = 1$ teorema este evidentă. Să presupunem că ea este adevărată pentru orice număr de băieţi mai mic decît n. Vom demonstra că este adevărată şi pentru n. Pot să fie doar două cazuri:

Cazul 1. Pentru un anumit $k(1 \leqslant \leqslant k < n)$ se găseşte o grupă formată din k băieţi care se cunosc (toţi împreună) exact cu k fete.

Vom nota mulţimea acestor băieţi prin B_k şi mulţimea prietenelor lor prin F_k. Pentru grupa B_k este îndeplinită presupunerea de inducţie. Ei îşi vor lua soţii din mulţimea F_k (în care sînt exact k fete). Vom elimina din raţionament pe aceşti băieţi şi pe aceste fete şi vom demonstra prin reducere la absurd că pentru ceilalţi $n - k$ băieţi este îndeplinită cerinţa teoremei. Vom alege din aceşti $n - k$ băieţi o grupă formată din r tineri. Să presupunem că numărul prietenelor lor este s, mai mic decît r. Ne reîntoarcem înapoi şi reunim această grupă de r băieţi cu grupa B_k. În noua grupă vor fi $r + k$ băieţi. Fiindcă în mulţimea F_k sînt toate prietenele celor din B_k (şi poate că sînt şi unele prietene ale celor r băieţi din grupa aleasă) rezultă că aceşti $k + r$ băieţi la început au $k + s$ prietene. Din condiţie rezultă $k + r \leqslant k + s$ deci $r \leqslant s$. Obţinem o contrazicere cu presupunerea $s < r$. Deci în acest caz teorema este adevărată.

Cazul 2. Orice grupă formată din k băieţi ($1 \leqslant k < n$) are cel puţin $k+1$ prietene.

În acest caz este mai simplu. Luăm orice băiat şi îl însurăm cu o prietenă a sa. Excludem această pereche din raţionamente. Vom demonstra că pentru ceilalţi $n-1$ băieţi este îndeplinită cerinţa teoremei. Vom lua orice grupă formată din k băieţi ($k \leqslant n-1$). La început ei aveau cel puţin $k+1$ prietene. Chiar dacă soţia celui pe care l-am însurat este dintre acestea tot mai rămîn k fete. Astfel teorema este complet demonstrată.
(Reluaţi cu atenţie raţionamentul acestei demonstraţii.)

M 16. *Să se demonstreze că un polinom $p(x)$ cu coeficienţi întregi care pentru trei valori întregi diferite ale lui x ia valoarea 1, nu poate să aibă nici o rădăcină întreagă.*

R e z o l v a r e. Observăm că pentru orice polinom $p(x)$ cu coeficienţi întregi şi pentru orice două numere întregi a şi b, diferenţa $p(b) - p(a)$ se divide prin $b - a$, întrucît pentru orice număr natural m, diferenţa $b^m - a^m$ se divide prin $b - a$:

$$b^m - a^m = (b-a)(b^{m-1} + b^{m-2}\,a + b^{m-3}\,a^2 + \ldots + ba^{m-2} + a^{m-1}).$$

Dacă există patru numere întregi c_1, c_2, c_3 şi a astfel încît $p(c_1) = p(c_2) = p(c_3) = 1$ şi $p(a) = 0$, atunci

$$p(c_1) - p(a) = p(c_2) - p(a) = p(c_3) - p(a) = 1$$

şi de aceea fiecare dintre numerele $c_1 - a$, $c_2 - a$, $c_3 - a$ poate fi doar 1 sau -1, deci toate aceste numere nu pot fi diferite.

Începutul rezolvării poate fi prezentat şi altfel. Fie a o rădăcină întreagă a polinomului $p(x)$. Atunci putem scrie $p(x) = (x-a)\ q(x)$. Înlocuim în această egalitate numerele c_1, c_2, c_3 care dau valoarea 1 pentru polinom şi obţinem $1 = (c_1 - a)\ q(c_1) = (c_2 - a)\ q(c_2) = (c_3 - a)\ q(c_3)$ şi în continuare la fel ca mai sus.

M 17. *Un ţăran, ajungînd la bifurcaţia a două drumuri cu un unghi de 60°, a întrebat: „Cum pot să ajung în satul NN?“ I s-a răspuns: „Te duci pe drumul din stînga pînă în satul N care se găseşte la 8 km de aici, acolo vezi că se face un drum la dreapta în unghi drept care duce la satul NN. Dar poţi să iei şi o altă cale: mergi acum pe drumul din dreapta; cum ajungi la calea ferată ai parcurs jumătate din drum; acolo te întorci spre stînga şi mergi pe traverse pînă ajungi la NN“ — „Dar care drum este mai scurt? — „ Tot una e, nu-i nici o diferenţă“ şi ţăranul a plecat pe drumul din dreapta.*

Cîţi kilometri are de parcurs pînă în NN? Mai mult de 10 sau mai puţin? Dar dacă se duce la NN direct peste cîmp? (Drumurile se consideră în linie dreaptă.)

R e z o l v a r e. Fie A bifurcaţia drumurilor, B satul N, C satul NN, D punctul în care drumul din dreapta iese la calea ferată. Din ipteze (distanţele sînt măsurate în km) $AB = 8$, $\sphericalangle A = 60°$, $AD = DC$, $\sphericalangle B = 90°$, $AB + BC = 2AD$. Fie $AD = 2x$, $DH \perp AB$ şi $DK \perp BC$ (fig. 42). Atunci $AH = x$. $KD = BH = 8 - x$, $AB + BC = 2AD = 4x$, $BC = 4x - 8$, $BK = DH = x\sqrt{3}$, $KC = |BC - BK| = |4x - 8 - x\sqrt{3}|$ şi pentru îndeplinirea tuturor condiţiilor problemei este necesar şi suficient să fie îndeplinită egalitatea $CK^2 + KD^2 = AD^2$ sau $(4x - 8 - x\sqrt{3})^2 + (8-x)^2 = 4x^2$, unde $8 - x > 0$ şi $4x - 8 > 0$ adică $2 < x < 8$. După transformări vom obţine

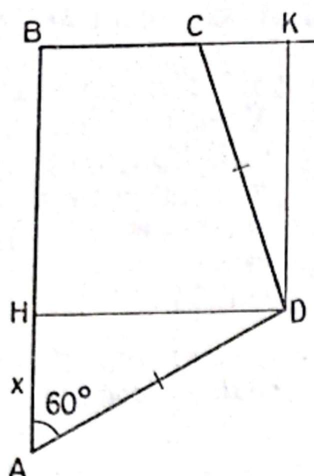


Fig. 42

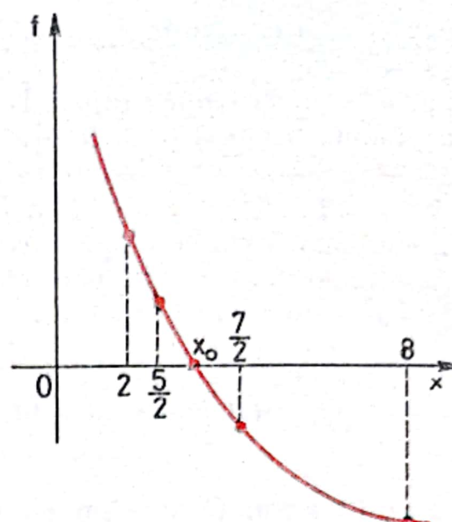


Fig. 43

$(2-\sqrt{3})\,x^2 - 2\,(5-\sqrt{3})\,x + 16 = 0$. Vom nota trinomul din membrul stîng prin $f(x)$. Se verifică uşor că condiţia $0 < x < 8$ este satisfăcută numai de rădăcina cea mai mică x_0 a ecuaţiei $f(x) = 0$ (fig. 43). Ea poate fi scrisă astfel:

$$x_0 = \frac{5-\sqrt{3}-\sqrt{6\sqrt{3}-4}}{2-\sqrt{3}} = 7 + 3\sqrt{3} - \sqrt{44 + 26\sqrt{3}}.$$

Ţăranul trebuie să parcurgă un drum de $4x_0$. Ca să vedem dacă acesta este mai mare sau mai mic decît 10 folosim direct ecuaţia. Întrucît $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}\,(14 - 5\sqrt{3}) > 0$, e clar că $x_0 > \frac{5}{2}$, adică $4x_0 > 10$.

Vom arăta că distanţa AC peste cîmp este mai mică decît 10. Într-adevăr, inegalitatea $\sqrt{8^2 + (4x_0 - 8)^2} < 10$, pentru $2 < x_0 < 8$ este echivalentă cu următoarea: $(4x_0 - 8)^2 < 36$, $4x_0 - 8 < 6$, $x_0 < \frac{7}{2}$. Ca şi mai înainte $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{4}\,(22 - 21\sqrt{3}) < 0$, de unde $x_0 < \frac{7}{2}$ şi prin urmare $AC < 10$. (Rezolvare asemănătoare ne-au trimis M. Pregher, M. Mihailov ş.a.)

S. Berkolaiko a găsit o demonstraţie scurtă pentru faptul că $AB + BC > 10$. Din teorema cosinusului aplicată triunghiului ABD rezultă

$$BD^2 = 4x_0^2 + 64 - 16x_0;$$

pe de altă parte, inegalitatea triunghiului dă

$$BD < BC + CD = 6x_0 - 8$$

de unde

$$4x^2 + 64 - 16x < (6x - 8)^2,\quad 2x^2 - 5x > 0$$

şi dacă ţinem cont de $2 < x_0 < 8$, obţinem $x_0 > \frac{5}{2}$. Un calcul exact al distanţei $AB + BC$ dă 11, 044 ... km.

M 18. a) *Să se demonstreze că pentru orice punct M de pe un cerc circumscris unui triunghi echilateral ABC unul dintre cele trei segmente MA, MB, MC este egal cu suma celorlalte două.*

b) Se dau trei cercuri congruente $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ două cîte două tangente între ele și în jurul lor un cerc γ tangent la toate cele trei. Să se demonstreze că pentru orice punct M al cercului γ una dintre tangentele duse din acest punct la unul dintre cercurile $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ este congruentă cu suma celorlalte două tangente duse din acest punct la celelalte două cercuri.

R e z o l v a r e. a). Fie punctul M pe arcul AB al cercului circumscris. Rotim triunghiul AMB în jurul punctului A cu 60°, astfel încît să ocupe poziția AKC (fig. 44). Întrucît unghiurile MBA și MCA sînt congruente (subîntind același arc) punctul K va fi situat pe segmentul MC. Întrucît $AM = AK$ și $\sphericalangle MAK = 60°$ (din construcție), triunghiul AMK este echilateral, de aceea $MK = AM$. Astfel

$$MA + MB = MK + KC = MC.$$

O altă rezolvare se obține direct din teorema lui Ptolomeu conform căreia în orice patrulater inscriptibil produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse; dacă în egalitatea $MC \cdot AB = MA \cdot BC + MB \cdot AC$ înlocuim pe BC și AC prin AB, vom obține $MC \cdot AB = (MA + MB)\ AB$, de unde $MC = MA + MB$.

b) Vom demonstra un lucru mai general. Să presupunem că centrele celor trei cercuri de rază r sînt vîrfurile triunghiului echilateral $C_1C_2C_3$ și O este centrul cercului circumscris acestuia, de rază a. Atunci pentru orice punct M al cercului de rază $R \doteq a + r$ cu centrul în O, tangenta dusă din punctul M la unul dintre cele trei cercuri de rază r este egală cu suma tangentelor duse din punctul M la celelalte două cercuri. Pentru $r = 0$ obținem cerința punctului a).

Să presupunem că raza OM face cu razele OC_k ($k = 0, 1, 2$) unghiurile $\alpha_k = \alpha_0 + k \cdot 120°$ (fig. 45). Atunci $MC_k^2 = R^2 + a^2 - 2Ra \cdot \cos \alpha_k$, iar pătratul tangentei duse din punctul M la cercul respectiv este egal cu $MC_k^2 - r^2 = R^2 + a^2 - 2Ra \cos \alpha_k - (R - a)^2 = 2Ra(1 - \cos\alpha_k)$. De aceea tangentele sînt egale cu $2\sqrt{Ra} \sin \frac{\alpha_k}{2}$, $\left(\sin \frac{\alpha_k}{2} \geqslant 0 \text{ întrucît } 0 \leqslant \alpha_k < 2\pi\right)$.

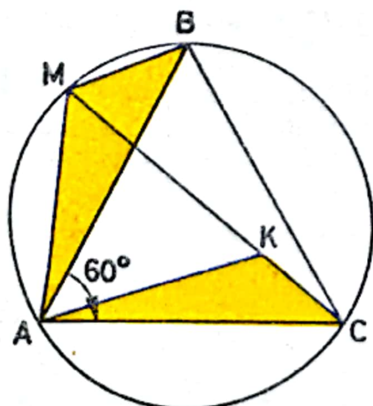


Fig. 44

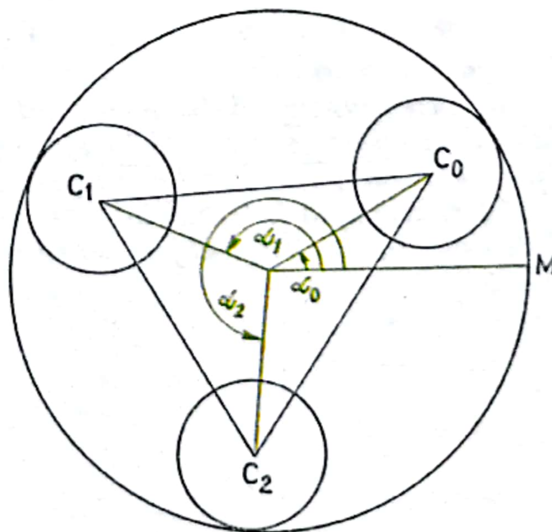


Fig. 45

A rămas de verificat egalitatea $\sin\frac{\alpha_0}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2} = \sin\frac{\alpha_1}{2}$. Acest lucru este simplu: $\sin\frac{\alpha_0}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2} = 2\cos 60° \cdot \sin\frac{\alpha_0 + \alpha_2}{4} = \sin\frac{\alpha_1}{2}$. Se poate da o generalizare a punctului a): fie M un punct pe arcul A_1A_{2n+1} al unui cerc circumscris unui poligon regulat cu $2n+1$ laturi, $A_1A_2A_3 \dots A_{2n}A_{2n+1}$; atunci

$$MA_1 + MA_2 + \dots + MA_{2n+1} = MA_2 + MA_3 + \dots + MA_{2n}$$

(rezolvarea constă în aplicarea teoremei lui Ptolomeu la patrulaterele

$$MA_1A_2A_3,\ MA_2A_3A_4, \dots, MA_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}\ MA_{2n+1}A_{2n}A_1,\ \ MA_{2n+1}A_2A_1$$

şi toţi termenii care conţin pe MA_{2k} se strîng în membrul stîng iar, termenii MA_{2k+1} în membrul drept). Gîndiţi-vă cum se demonstrează această afirmaţie şi generalizarea analoagă a punctului b), cu ajutorul funcţiilor trigonometrice.

M 19. *Într-un lanţ infinit de celule sensibile fiecare celulă se poate găsi în două stări „liniştită" şi „excitată". Dacă la un anumit moment o celulă a fost excitată, atunci ea emite un semnal care după un timp scurt (să zicem după o milisecundă) ajunge la fiecare dintre cele două celule vecine cu ea. Fiecare celulă este excitată atunci şi numai atunci cînd la ea ajunge un semnal de la una dintre celulele vecine; dacă semnalele ajung deodată din amîndouă părţile, atunci ele se anulează şi celula nu se excită. De exemplu, dacă în momentul iniţial $t = 0$ se excită trei celule vecine, atunci excitaţia se transmite aşa cum este arătat în figura 46.*

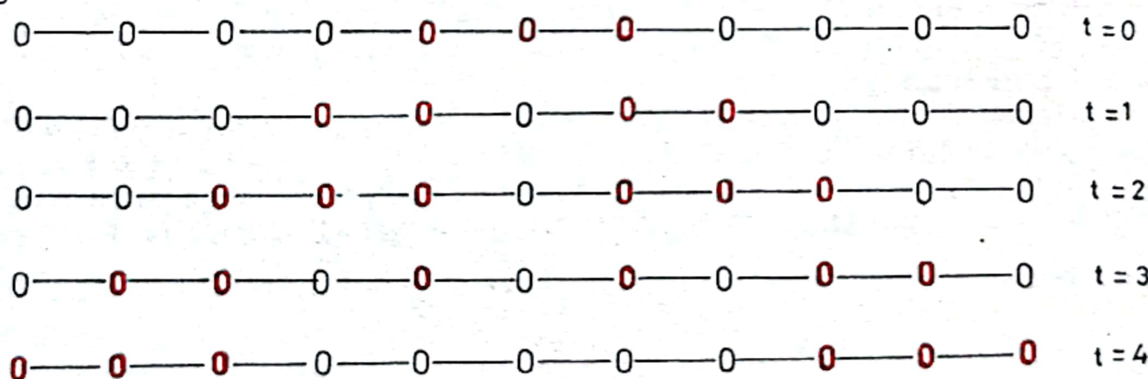


Fig. 46

Să presupunem că în momentul iniţial este excitată numai una dintre celule. Cîte celule se vor găsi în stare excitată după 15 msec? după 65 msec? după 1 000 msec? în general după t msec?

Ce se întîmplă în cazul în care lanţul nu este infinit ci conţine în total N celule unite în cerc (fig. 47) — se va menţine excitaţia oricît de mult sau se va linişti?

N. Vasiliev

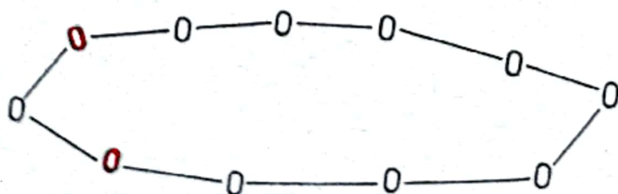


Fig. 47

A rămas de verificat egalitatea $\sin\frac{\alpha_0}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2} = \sin\frac{\alpha_1}{2}$. Acest lucru este simplu: $\sin\frac{\alpha_0}{2} + \sin\frac{\alpha_2}{2} = 2\cos 60°\cdot \sin\frac{\alpha_0+\alpha_2}{4} = \sin\frac{\alpha_1}{2}$. Se poate da o generalizare a punctului a): fie M un punct pe arcul A_1A_{2n+1} al unui cerc circumscris unui poligon regulat cu $2n+1$ laturi, $A_1A_2A_3\dots A_{2n}A_{2n+1}$; atunci

$$MA_1 + MA_2 + \dots + MA_{2n+1} = MA_2 + MA_3 + \dots + MA_{2n}$$

(rezolvarea constă în aplicarea teoremei lui Ptolomeu la patrulaterele

$$MA_1A_2A_3,\ MA_2A_3A_4, \dots, MA_{2n-1}A_{2n}A_{2n+1}\ MA_{2n+1}A_{2n}A_1,\ \ MA_{2n+1}A_2A_1$$

și toți termenii care conțin pe MA_{2k} se strîng în membrul stîng iar, termenii MA_{2k+1} în membrul drept). Gîndiți-vă cum se demonstrează această afirmație și generalizarea analoagă a punctului b), cu ajutorul funcțiilor trigonometrice.

M 19. *Într-un lanț infinit de celule sensibile fiecare celulă se poate găsi în două stări „liniștită“ și „excitată“. Dacă la un anumit moment o celulă a fost excitată, atunci ea emite un semnal care după un timp scurt (să zicem după o milisecundă) ajunge la fiecare dintre cele două celule vecine cu ea. Fiecare celulă este excitată atunci și numai atunci cînd la ea ajunge un semnal de la una dintre celulele vecine; dacă semnalele ajung deodată din amîndouă părțile, atunci ele se anulează și celula nu se excită. De exemplu, dacă în momentul inițial $t = 0$ se excită trei celule vecine, atunci excitația se transmite așa cum este arătat în figura 46.*

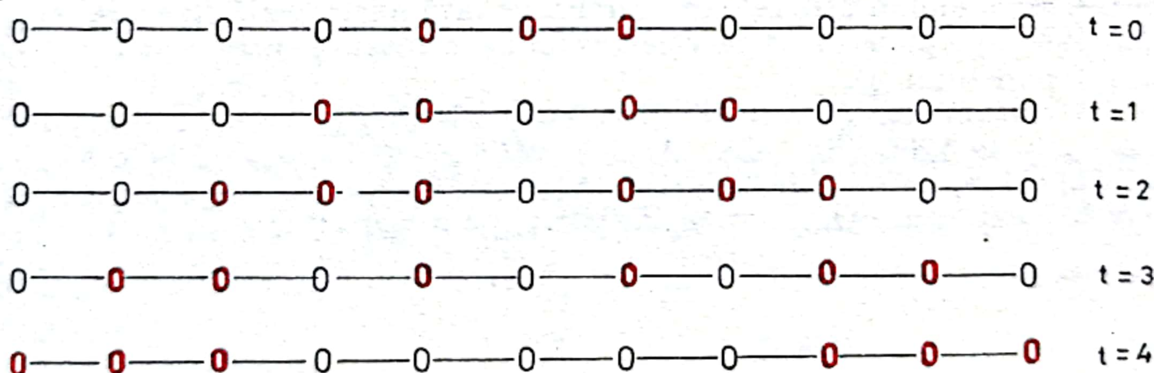
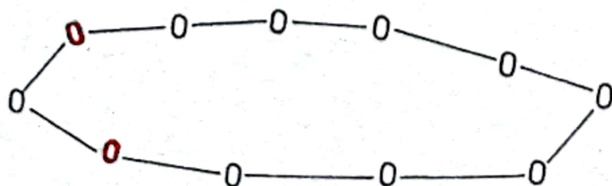


Fig. 46

Să presupunem că în momentul inițial este excitată numai una dintre celule. Cîte celule se vor găsi în stare excitată după 15 msec? după 65 msec? după 1 000 msec? în general după t msec?

Ce se întîmplă în cazul în care lanțul nu este infinit ci conține în total N celule unite în cerc (fig. 47) — se va menține excitația oricît de mult sau se va liniști?

N. Vasiliev


Fig. 47

R e z o l v a r e. Este suficient să urmărim cum se propagă excitaţia de la o singură celulă în primii 10—15 timpi (fig. 48) pentru ca să observăm următoarele reguli:

1. La momentul $t = 2^k$ unde $k = 0, 1, 2, \ldots$ sînt excitate numai două celule: $x = -2^k$ şi $x = 2^k$.

2. La momentul $t = 2^k - 1$ sînt excitate 2^k celule de la $x = -2^k + 1$ pînă la $x = 2^k - 1$ cu x impar.

3. Fie $0 \leqslant t < 2^k$. Atunci la momentul $2^k + t$ sînt excitate exact de două ori mai multe celule decît în momentul t.

Pentru demonstraţia acestor reguli (prin inducţie după k) se poate folosi faptul că „undele de excitaţie", generate de fiecare dintre cele două celule active în momentul 2^k, nu se acoperă pînă în momentul $t = 2^{k+1} - 1$ şi de aceea fiecare dintre ele este construită la fel ca şi unda de excitaţie de la o singură celulă pentru $t < 2^k$.

Acum se răspunde uşor la întrebările puse în problemă. După 15 msec aşa cum se vede din figură, vor fi 16 celule excitate. După $64 = 2^6$ vor fi două, deci după 65 msec vor fi patru. Pentru un t oarecare se poate calcula $f(t)$ — numărul celulelor excitate la momentul t — aplicînd de mai multe ori proprietatea 3. De fiecare dată din t se scade cea mai mare putere posibilă a lui 2 apoi $f(t)$ se micşorează de două ori. De exemplu

$$\begin{aligned}
&1000 - 2^9 = 1000 - 512 = 488 &\quad f(1000) &= \\
&488 - 2^8 = 488 - 256 = 232 &\quad &= 2f(488) = \\
&232 - 2^7 = 232 - 128 = 104 &\quad &= 4f(232) = \\
&104 - 2^6 = 104 - 64 = 40 &\quad &= 8f(104) = \\
&40 - 2^5 = 40 - 32 = 8 &\quad &= 16f(40) = \\
&8 - 2^3 = 8 - 8 = 0 &\quad &= 32f(8) = 64
\end{aligned}$$

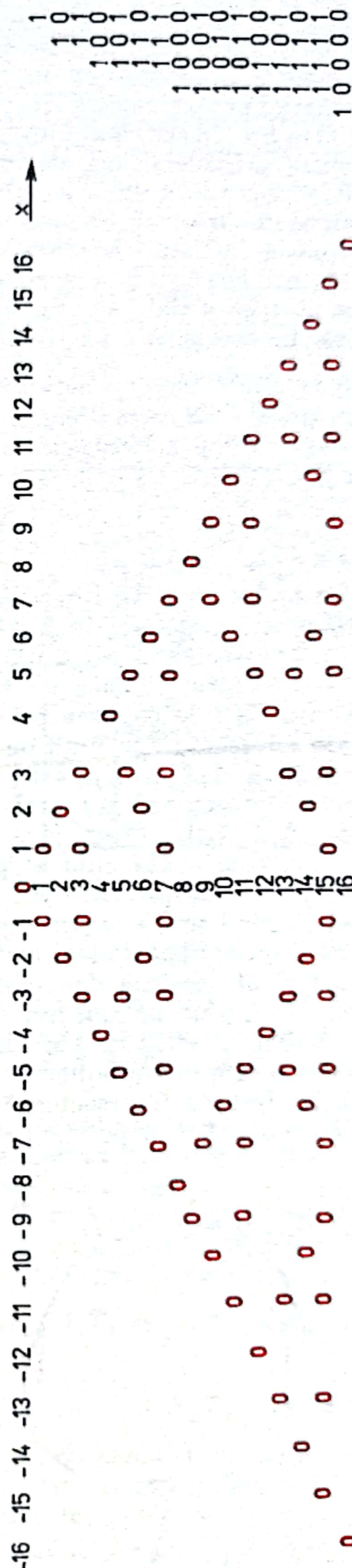


Fig. 48

Se poate formula răspunsul ușor în cazul general dacă se folosește sistemul binar de numerație. Într-adevăr, a scădea dintr-un număr puterea cea mai mare a lui 2, înseamnă că în sistemul binar se elimină prima cifră a numărului. Astfel pentru orice t, $f(t)$ este egal cu 2^m unde m este numărul cifrelor 1 în scrierea lui t în sistemul binar. Această regulă se demonstrează prin inducție, iar pentru primele valori ale lui t se poate verifica în tabelul din figura 48.

Răspunsul la a doua întrebare a problemei, ce se întîmplă dacă celulele sînt aranjate în cerc? — depinde evident nu numai de N dar în general și de „situația inițială" — care celule sînt excitate la momentul inițial. În această problemă există o regulă generală simplă care permite ca pentru fiecare poziție inițială să se spună dacă ajung vreodată toate celulele în stare liniștită. Încercați să o găsiți singuri.

M 20. *Se poate împărți un triunghi echilateral într-un milion de poligoane convexe astfel încît orice dreaptă să nu intersecteze mai mult de 40 dintre aceste poligoane? (dreapta intersectează poligonul dacă are cu el cel puțin un punct comun).*

A XXXI-a Olimpiadă de matematică din Moscova

R ă s p u n s. Se poate.

R e z o l v a r e. În figura 49 este reprezentat un dodecagon convex care este tăiat de diagonale în 5 părți: un octogon și patru triunghiuri. Orice dreaptă intersectează cel mult două din aceste triunghiuri. Într-adevăr, o dreaptă care intersectează un triunghi trebuie să intersecteze cel puțin una dintre laturile sale comune cu a dodecagonului; pe de altă parte, o dreaptă nu poate intersecta mai mult de două laturi nevecine ale unui poligon convex. Analog, dacă $A_1A_2 \dots A_{3n}$ este un poligon convex cu $3n$ laturi, atunci orice dreaptă intersectează nu mai mult de două dintre triunghiurile $A_1A_2A_3$, $A_4A_5A_6$, $A_7A_8A_9$, ..., $A_{3n-2}\, A_{3n-1}\, A_{3n}$.

Acum vom arăta cum se poate împărți în modul cerut triunghiul (fig. 50). Vom duce drepte care vor decupa trei triunghiuri de rangul întîi, astfel încît să rămînă un hexagon regulat. La fiecare vîrf al acestuia decupăm un triunghi de rangul al doilea, astfel încît să rămînă un dodecagon regulat. La fiecare vîrf al acestuia decupăm cîte un triunghi de rangul al treilea astfel încît să rămînă un poligon regulat cu 24 laturi și așa mai departe de 19 ori. După tăierea la vîrfurile poligonului cu $3 \cdot 2^{k-1}$ laturi a $3 \cdot 2^{k-1}$ triunghiuri de rangul k rămîne un poligon regulat cu $3 \cdot 2^k$ laturi ($k = 1, 2, \dots, 19$).

Orice dreaptă intersectează nu mai mult de două triunghiuri de fiecare rang și eventual încă poligonul cu $3 \cdot 2^{19}$ laturi adică în total nu mai mult

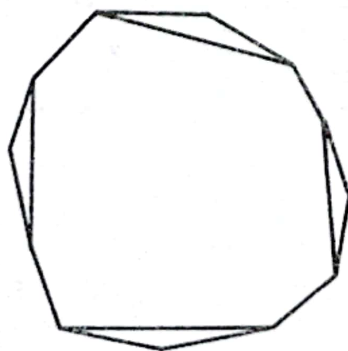


Fig. 49

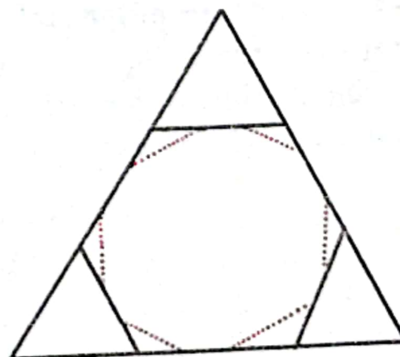


Fig. 50

de $1 + 2 \cdot 19 = 39$ poligoane. Numărul total de poligoane în care este împărțit triunghiul este egal cu $1 + 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + 3 \cdot 2^{18} = 1 + 3(2^{19} - 1) \cdot 2^{20} = (2^{10})^2\ 1000^2$.

M 21. *În interiorul unui pătrat de latură 1 sînt situate cîteva cercuri, suma lungimilor lor este egală cu 10. Să se demonstreze că se poate găsi o dreaptă care să intersecteze cel puțin patru dintre aceste cercuri.*

Din problemele date la Școala serală de matematică de pe lîngă Universitatea din Moscova

Alegem o latură oarecare a pătratului, fie AB, și proiectăm pe ea toate cercurile. Să presupunem că nu se poate duce dreapta cerută. Atunci fiecare punct de pe latura AB este acoperit de cel mult trei proiecții de cercuri (vezi figura 51) altfel dreapta care ar trece prin acest punct perpendiculară pe AB ar intersecta mai mult de trei cercuri. Prin urmare, suma tuturor proiecțiilor, adică suma lungimilor diametrelor cercurilor nu depășește pe 3; de aceea suma lungimilor cercurilor nu depășește 3π, dar după ipoteză ea este egală cu $10 > 3\pi$. Contradicția obținută demonstrează afirmația problemei.

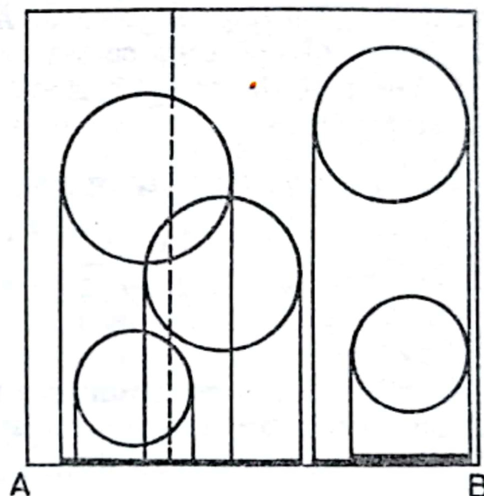


Fig. 51

În mod analog se poate demonstra următoarea afirmație mai generală. Vom numi diametrul unei figuri convexe, lățimea celei mai înguste benzi în care această figură poate fi situată. (Se poate arăta că această definiție este bună pentru orice figură mărginită.) Atunci, dacă în interiorul unei figuri cu diametru h se află n figuri suma diametrelor cărora este mai mare decît kh, atunci se găsește o dreaptă care va intersecta cel puțin $k + 1$ dintre aceste figuri.

M 22. *a) Într-un unghi sînt înscrise două cercuri; ele au tangenta comună interioară T_1T_2(T_1 și T_2 sînt punctele de tangență) care intersectează laturile unghiului în punctele A_1 și A_2. Să se demonstreze că $A_1T_1 = A_2T_2$ (sau, echivalent $A_1T_2 = A_2T_1$).*

b) Într-un unghi sînt înscrise două cercuri, unul dintre ele este tangent la laturile unghiului în punctele K_1 și K_2, iar celălalt în punctele L_1 și L_2. Să se arate că dreapta K_1L_2 determină în aceste cercuri coarde egale.

a) Se poate considera că punctele T_1 și T_2 sînt situate pe dreapta A_1A_2 în ordinea următoare: A_1, T_1, T_2, A_2 (vezi figura 52). Atunci, întrucît cele două tangente duse din același punct la cerc sînt egale, avem

$$A_1T_1 = A_1K_1,\ A_1T_2 = A_1L_1,\ A_2I_2 = A_2L_2,\ A_2T_1 = A_2\ K_2, K_2L_2 = K_1L_1$$

de unde

$$A_1T_1 + A_1T_2 = A_2T_1 + A_2T_2, 2A_1T_1 + T_1T_2 = 2A_2T_2 + T_1T_2, A_1T_1 = A_2T_2.$$

b) Fie P punctul de intersecție a lui K_1L_2 cu cercul tangent la laturile unghiului în punctele K_1 și K_2, Q punctul de intersecție a lui KL_2 cu al doilea cerc (figura 53). Ne folosim de puterea punctului față de cerc:

$$L_1K_1^2 = K_1Q \cdot K_1L_2, \qquad L_2K_2^2 = L_2P \cdot L_2K_1.$$

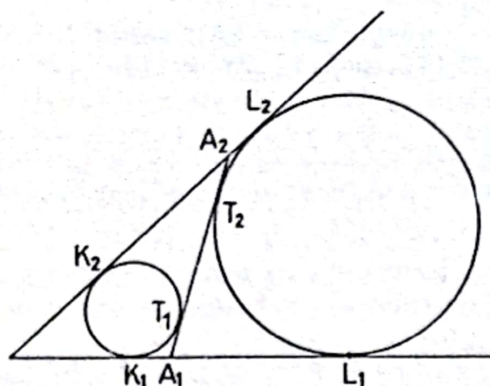


Fig. 52

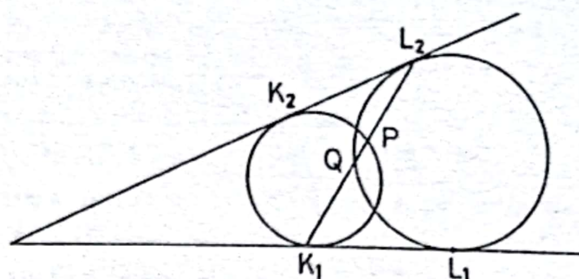


Fig. 53

Întrucît $L_1K_1 = L_2K_2$, vom obține $K_1Q \cdot K_1L_2 = L_2P \cdot L_2K_1$, de unde $K_1Q = L_2P$.

Adăugînd la ambele părți ale acestei egalități PQ (sau, în funcție de ordinea punctelor P și Q pe segmentul K_1L_2 scăzînd PQ din ambele părți ale egalității) vom obține ceea ce s-a cerut $K_1P = L_2Q$.

Apropiat de această rezolvare au trimis A. Virovlianski din Gorki și D. Grigoriev.

M 23. *Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n > 1$.*

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{2n}} < \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n} < \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

A.O. Ghelfond

La început vom expune cea mai scurtă rezolvare propusă de remarcabilul matematician sovietic, specialistul în teoria numerelor A.O. Ghelfond.

Vom transcrie pătratul expresiei date astfel

$$P_n^2 = \frac{1^2}{2^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdots\frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3^2}{2\cdot 4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot 6}\cdots\frac{(2n-1)^2}{(2n-2)\cdot 2n}\cdot\frac{1}{2n}.$$

Întrucît pentru orice întreg $k > 1$ avem

$$\frac{(2k-1)^2}{(2k-2)\cdot 2k} = \frac{(2k-1)^2}{(2k-1)^2-1} > 1,$$

atunci

$$P_n^2 > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n} \text{ și } P_n > \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Pe de altă parte fiindcă totdeauna

$$\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \frac{(2k)^2-1}{(2k)^2} < 1,$$

atunci

$$P_n^2 = \frac{3}{2^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6^2}\cdots\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)^2}\cdot\frac{2n-1}{(2n^2)} < \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2n}$$

și

$$P_n < \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

O rezolvare întrucîtva diferită aparţine lui D. Grigoriev (această rezolvare au trimis-o şi alţi cititori ai revistei). Să considerăm împreună cu expresia dată

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n}$$

şi următoarea

$$Q_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \frac{2n-2}{2n-1}.$$

Întrucît fiecare dintre factorii produsului Q_n nu este mai mare decît factorul corespunzător al produsului P_n, rezultă $P_n > Q_n$ şi prin urmare $P_n^2 > P_nQ_n = 1/4n$ adică $P_n > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Pe de altă parte

$$R_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot 1 > P_n$$

de aceea $P_n^2 < P_nR_n = 3/8n$ şi $P_n < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

S-ar părea că pentru R_n este mai natural să nu se înceapă cu 1/2 ci cu 2/3. Atunci se obţine pentru P_n o evaluare mai grosolană decît cea cerută de problemă. Invers, dacă se păstrează în R_n nu un singur factor ci mai mulţi factori egali cu primul factor din P_n atunci pentru P_n se obţine o evaluare mai bună de forma $P_n < c/\sqrt{n}$ unde c este un număr mai mic decît $\sqrt{3/8}$. Aceeaşi observaţie, relativ şi la cealaltă evaluare.

Există de asemenea o soluţie bazată pe metoda inducţiei matematice. Chiar pe exemplul acestui exerciţiu în nota lui E.G. Nicolaev „Un caz cu metoda inducţiei matematice" (vezi Kvant nr. 7, 1970, pag. 37 şi Kvant nr. 12, 1970, pag. 58) s-a arătat că uneori este mai simplu să se demonstreze prin inducţie o inegalitate mai strictă decît una mai slabă.

Din inegalităţile demonstrate rezultă că mărimea P_n, odată cu creşterea lui n, tinde către zero iar mărimea $P_n\sqrt{n}$ este cuprinsă între 1/2 şi $(1/2)\cdot\sqrt{3/2}$. Se poate demonstra (vezi de exemplu problemele 145, 160, 161 din cartea lui A.M. Iaglom şi I.M. Iaglom „Probleme neelementare rezolvate elementar") că pentru $n \to \infty$, P_n tinde către limita $\sqrt{1/\pi}$.

M. 24. *Să se arate că orice fracţie* $\frac{m}{n}$ *unde* $0 < \frac{m}{n} < 1$ *poate fi scrisă sub forma*

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \dots + \frac{1}{q_r}$$

unde $0 < q_1 < q_2 < \dots < q_r$ *sînt numere întregi şi fiecare* q_k $(k = 2, 3 \dots r)$ *se divide la* q_{k-1}.

Rezolvare. Fiecare fracţie $\frac{m}{n}$ poate fi înlocuită printr-o fracţie echivalentă ireductibilă simplificînd-o prin c.m.m.d.c. al numărătorului şi al

numitorului. De exemplu $\frac{288}{504} = \frac{4 \cdot 72}{7 \cdot 72} = \frac{4}{7}$. În continuare vom considera numai astfel de fracţii ireductibile.

Vom demonstra afirmaţia problemei prin inducţie după m. Pentru $m = 1$ ea este evidentă: însăşi fracţia m/n are aspectul cerut. Acum vom demonstra că dacă afirmaţia problemei este adevărată pentru toate fracţiile cu numărători mai mici decît m, ea va fi adevărată şi pentru fracţiile cu numărători egali cu m. Fie m/n o astfel de fracţie ($1 < m < n$). Efectuînd împărţirea cu rest n la m vom obţine cîtul $(d_0 - 1)$ şi restul $(m - k)$, adică

$$n = m(d_0 - 1) + (m - k) = md_0 - 1 \qquad (1)$$

unde $d_0 > 1$ şi $0 < k < m$. Vom retranscrie pe (1) astfel: $md_0 = n + k$ sau

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{d_0}\left(1 + \frac{k}{n}\right). \qquad (2)$$

Întrucît $0 < k < m$, fracţia k/n poate fi scrisă în forma cerută:

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1 d_2} + \ldots + \frac{1}{d_1 d_2 \ldots d_r}. \qquad (3)$$

unde $d_1, d_2, \ldots, d_r$ sînt unele numere naturale mai mari decît 1. Din (2) şi (3) obţinem

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_0 d_1} + \frac{1}{d_0 d_1 d_2} + \ldots + \frac{1}{d_0 d_1 d_2 \ldots d_r}$$

şi fracţia m/n a fost adusă la forma cerută.

Remarcăm că din rezolvarea problemei rezultă un algoritm simplu, regula după care o fracţie dată se pune sub forma sumei (3). Să îl prezentăm pe un exemplu. Fie dată fracţia 5/7:

$$7 = 2 \cdot 5 - 3 \qquad \frac{5}{7} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{7}\right)$$

$$7 = 3 \cdot 3 - 2 \qquad \frac{3}{7} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{7}\right)$$

$$7 = 4 \cdot 2 - 1 \qquad \frac{2}{7} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{7}\right).$$

Astfel

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{168}.$$

Desigur se pot găsi mai multe reprezentări ale unei fracţii sub forma (3), de exemplu

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}.$$

M. 25. *Într-o mulţime formată din n elemente s-au ales 2^{n-1} submulţimi astfel încît oricare trei dintre ele au un element comun. Să se arate că toate aceste submulţimi au un element comun.*

A XXX-a Olimpiadă de matematică din Moscova

În total mulţimea A formată din n elemente admite 2^n submulţimi diferite considerînd şi mulţimea vidă şi însăşi mulţimea A. Vom nota submulţimile diferite ale lui A prin literele B, C ... intersecţia mulţimilor B şi C prin $B \cap C$ şi complementara mulţimii B faţă de A prin $\bar{B}$.

Prin ipoteză s-au ales 2^{n-1} submulţimi adică jumătate din toate cele posibile şi fiecare dintre submulţimile alese este astfel încît intersecţia oricăror două (şi chiar trei) nu este vidă. Prin urmare, din fiecare pereche de submulţimi $(B, \bar{B})$ complementare, a fost aleasă exact una. Mai departe, dacă B şi C au fost alese atunci $D = B \cap C$ a fost de asemenea aleasă, întrucît $\bar{D}$ nu poate să fie aleasă (toate trei submulţimile $\bar{D}$, B şi C nu pot să aibă elemente comune căci elementele comune ale lui B şi C sînt cuprinse în D). Folosind aceasta, printr-o inducţie evidentă se poate demonstra că, dacă $B_1, B_2 \ldots B_k$ sînt alese, atunci intersecţia tuturor submulţimilor $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k$ este de asemenea aleasă. Prin urmare intersecţia tuturor 2^{n-1} submulţimilor alese este de asemenea aleasă, deci ea nu este vidă.

Astfel am demonstrat că ipoteza problemei este satisfăcută numai de următorul sistem de submulţimi: se fixează un element oarecare al mulţimii A şi se aleg toate submulţimile care conţin acest element.

N.B. Vasiliev

M. 26. *Să presupunem că în fiecare număr al revistei noastre la rubrica probleme se vor publica cîte cinci probleme de matematică. Vom nota prin $f(x, y)$ numărul primei probleme a numărului x al revistei din anul y, (de exemplu, $f(6, 1970) = 26$). Să se scrie o formulă generală pentru $f(x, y)$ pentru toţi x, y ($1 \leqslant x \leqslant 12$, $y \geqslant 1970$). Să se rezolve ecuaţia $f(x, y) = y$.*

Funcţia f satisface următoarele condiţii:

1) $f(1, 1970) = 1$,

2) $f(x+1, y) = f(x, y) + 5$, $(1 \leqslant x \leqslant 12)$,
— pentru fiecare lună $f(x, y)$ se măreşte cu 5;

3) $f(1, y+1) = f(1, y) + 60$,
— pentru fiecare an $f(x, y)$ se măreşte cu 60.

Este clar că cu aceste condiţii funcţia este unic determinată; ea poate fi dată de exemplu de formula următoare

$$f(x, y) = 5x + 60(y - 1970) - 4.$$

Este uşor de verificat că $f(5, 2003) = 2001$; $f(6, 2003) = 2006$. De aceea ecuaţia $f(x, y) = y$ nu are soluţie.

Din cele spuse mai sus reiese că dacă am fi introdus şi funcţia $f(k, x, y)$ — numărul k al problemei din al x-lea număr al revistei din anul y ($1 \leqslant k \leqslant 5$, $1 \leqslant x \leqslant 12$, $y \geqslant 1970$), atunci ecuaţia $f(k, x, y) = y$ ar avea soluţia unică $k = 3$, $x = 5$, $y = 2003$, cu alte cuvinte dacă sistemul nostru ar rămîne pînă atunci neschimbat (pînă acum în fiecare număr au fost cinci probleme de matematică) a treia problemă a revistei Kvant nr. 5 din anul 2003 va avea numărul M 2003. Formula generală pentru $f(k, x, y)$ este:

$$f(k, x, y) = k + 5x + 60(y - 1970) - 5.$$

Pentru cititori este desigur mai utilă formula dată de o funcţie inversă care ar permite ca după numărul n al problemei să se găsească anul y şi numărul x al revistei în care s-a propus această problemă.

Pentru aceasta este util să folosim notaţia [a] — partea întreagă a numărului a (cel mai mare număr întreg care nu-l depăşeşte pe a) şi $\{a\} = a - [a]$ — partea fracţionară a lui a. Verificaţi că

$$x = \left[12\left\{\frac{n-1}{60}\right\}\right] + 1, \quad y = \left[\frac{n-1}{60}\right] + 1970.$$

M. 27. *Să se arate că dacă* $\dfrac{a}{b-c} + \dfrac{b}{c-a} + \dfrac{c}{a-b} = 0$, *atunci*

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

Această afirmaţie rezultă din următoarea identitate:

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right) = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}.$$

Pentru justificarea ei este suficient să înmulţim termen cu termen cele două sume din partea stîngă şi să ţinem cont că suma următoarelor trei fracţii:

$$\frac{a}{b-c}\left(\frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right) = \frac{ca-ab}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \quad \frac{b}{c-a}\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b}\right) =$$

$$= \frac{ab-bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \quad \frac{c}{a-b}\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right) = \frac{bc-ca}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

este nulă.

După citirea unei astfel de rezolvări artificiale poate să apară pe deplin îndreptăţită întrebarea: cum se ghiceşte că expresia dată trebuie înmulţită exact cu $\dfrac{1}{b-c} + \dfrac{1}{c-a} + \dfrac{1}{a-b}$? Nu se poate imagina un mod general de raţionament care să permită să se rezolve probleme asemănătoare?

Mai natural s-ar fi rezolvat această problemă astfel. Să scriem expresiile date sub forma unui cît de două polinoame:

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = \frac{p(a,b,c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \quad \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} =$$

$$= \frac{q(a,b,c)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}$$

(p va fi un polinom de gradul al treilea iar q de gradul al cincilea). Va trebui să demonstrăm că dacă $p(a, b, c) = 0$, atunci şi $q(a, b, c) = 0$. Este natural să încercăm să demonstrăm că polinomul q se împarte la polinomul p, adică există un polinom $r = r(a, b, c)$, astfel încît $q = pr$ (se poate demonstra o teoremă generală pentru polinoame de oricîte variabile: dacă q este egal cu zero pentru toate acele valori ale variabilelor pentru care p este egal cu zero şi dacă p este i r e d u c t i b i l, adică nu se descompune în factori — şi în cazul nostru chiar aşa este — atunci q se divide la p). Polinoamele se pot împărţi în mod obişnuit, considerîndu-le polinoame de o singură variabilă a (în coeficienţii cărora intră literele b şi c), de exemplu p se va scrie astfel:

$$p(a, b, c) = -a^3 + p_1(b, c)a^2 + p_2(b, c)\,a + p_3(b, c).$$

Ca rezultat am obţine desigur că $q = pr$ unde

$$r(a, b, c) = (a-b)(b-c)(c-a)\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right) =$$

$$= -a^2 + ab + ac + bc - b^2 - c^2.$$

În acest exemplu, realizarea acestui plan de rezolvare este legat de mari dificultăţi de calcul (în polinomul $q(a, b, c)$ chiar după efectuarea reducerilor termenilor asemenea rămîn 21 de termeni!) dar sfătuim insistent pe cititori să se gîndească la toate amănuntele acestui plan de rezolvare general aplicabil în multe alte probleme.

N.B. Vasiliev

M. 28. *a) Din 19 bile 2 sînt radioactive. Din orice mulţime de bile, după o verificare se poate şti dacă în ea se află cel puţin o bilă radioactivă (dar nu se poate şti cîte astfel de bile sînt în mulţime). Să se arate că după 8 verificări se pot depista ambele bile radioactive.*

b) Din 11 bile 2 sînt radioactive. Să se arate că cu mai puţin de 7 verificări nu se pot depista ambele bile radioactive.

A XXX-a Olimpiadă de matematică din Moscova

Începem cu o problemă analoagă dar mai simplă. Fie date n bile dintre care una este radioactivă; după cîte verificări poate fi depistată? Este uşor de indicat modalitatea ca prin k verificări să se depisteze una din $n = 2^k$ bile: la început împărţim toate bilele în două grămezi egale cu cîte 2^{k-1} bile în fiecare, verificăm una dintre ele şi astfel determinăm în care dintre ele se găseşte bila radioactivă, apoi această grămadă formată din 2^{k-1} bile din nou o împărţim în două jumătăţi, verificăm una dintre jumătăţi ş.a.m.d. — la fiecare astfel de verificare numărul bilelor se înjumătăţeşte şi după k verificări vom găsi bila radioactivă. E clar că dacă $n < 2^k$, atunci de asemenea sînt suficiente k verificări. Astfel, pentru depistarea unei singure bile radioactive din n este suficient să se facă $f_1(n)$ verificări, unde $f_1(n)$ este cel mai mic număr întreg k pentru care $n \leqslant 2^k$ (cu alte cuvinte $f_1(n)$ este cel mai mic număr întreg, mai mare sau egal cu $\log_2 n$). Mai jos vom vedea că un număr mai mic de verificări este insuficient.

Acum să trecem direct la rezolvarea problemei noastre. Aici nu vom reuşi să obţinem un rezultat exact deodată pentru orice n şi vom lămuri la început după cîte verificări se pot depista 2 bile radioactive din n, dacă n este un număr mic.

Pentru $n = 3$ sînt suficiente două verificări; după ce vom verifica succesiv două bile e clar dacă a treia bilă va fi radioactivă sau nu. Se poate desigur întîmpla ca deja prima bilă verificată să nu fie radioactivă şi atunci verificările ulterioare nu mai sînt necesare dar pe noi ne interesează după ce număr de verificări se pot depista bilele radioactive, cu siguranţă, pentru orice variantă, chiar nefavorabilă nouă, de aranjare a lor.

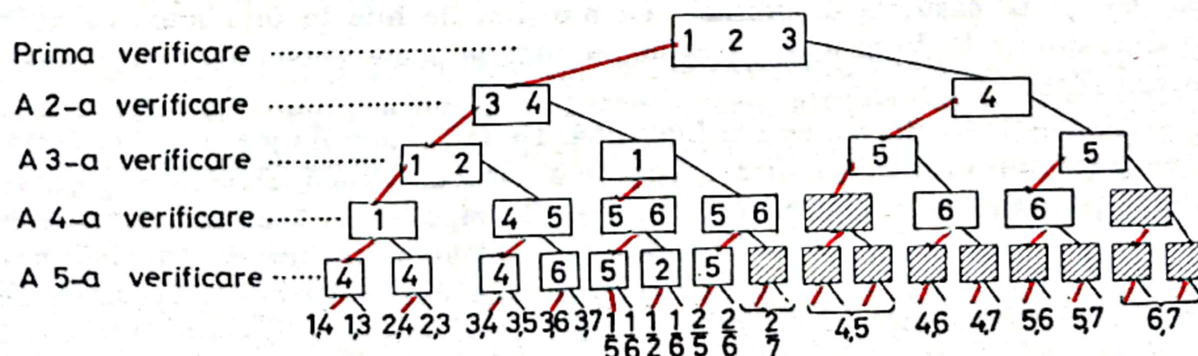


Fig. 54

În această schemă (fig. 54), sînt reprezentate modalitățile care permit ca din 5 verificări să se depisteze 2 bile radioactive din 7. Considerăm că bilele sînt numerotate cu cifrele 1, 2, ..., 7. și în fiecare căsuță înscriem mulțimea de bile supusă verificării (cîteodată mulțimea constă dintr-o singură bilă). De exemplu, prima dată se verifică mulțimea formată din bilele {1, 2, 3}. La fiecare verificare sînt posibile două rezultate: „este radioactivitate", atunci se trece pe săgeata roșie (din stînga), și „nu este radioactivitate", atunci se trece pe săgeata neagră (din dreapta). Dacă se hașurează căsuța înseamnă că verificări ulterioare nu mai sînt necesare. Pentru fiecare drum care merge după săgeți de sus în jos, ca rezultat al tuturor verificărilor făcute pe acest drum se poate stabili care anume pereche de bile este radioactivă (ea este indicată sub cea mai de jos săgeată). Convingeți-vă! Exact la fel, verificînd succesiv bilele se pot depista două bile din 4 cu 3 verificări, din 5 după 4, din 6 după 5, din 7 după 6 ș.a.m.d. De altfel, pentru $n = 7$ se pot găsi și 5 verificări. Înainte de a citi rezolvarea mai departe încercați să demonstrați aceasta, adică să găsiți modul respectiv de căutare a bilelor radioactive. Un astfel de mod (există mai multe) este indicat în figură.

Această figură ne ajută să înțelegem cuvintele „modalitate de căutare a bilelor". Pentru a da un mod oarecare trebuie să se indice gruparea de bile care se verifică prima și de asemenea să se indice ce grupare se verifică după fiecare dintre rezultatele posibile ale verificării de radioactivitate efectuate; cu alte cuvinte, trebuie să se schițeze o diagramă formată din căsuțe și săgeți la fel ca cea din figură, numai dacă e nevoie, cu alt număr k de verificări și să se înscrie în fiecare căsuță un anumit număr de bile.

Să încercăm acum să răspundem la două chestiuni strîns legate între ele: cum se găsește o modalitate de căutare a două bile din n, din k verificări, dacă astfel de verificare există; dacă nu există cum se poate demonstra acest lucru?

În principiu, pentru orice n și k stabiliți, aceste chestiuni se pot rezolva prin „parcurgere completă": se încearcă succesiv toate modurile posibile de a completa căsuțele diagramei corespunzătoare la k verificări, ale submulțimilor formate din cele n bile (există doar un număr finit de astfel de moduri!) și pentru fiecare dintre aceste moduri se verifică dacă permite sau nu să depisteze bilele radioactive (aici pot să fie diferite situații, pentru o anumită pereche de bile radioactive să corespundă mai multe drumuri de săgeți de sus în jos). Dar numărul acestor moduri, chiar și pentru n și k nu prea mari este atît de mare, încît practic nu se poate face „parcurgerea completă" fie chiar cu ajutorul calculatoarelor (de exemplu, pentru $n = 11$ și $k = 7$ se pot completa căsuțele diagramei cu mulțimi de bile în mai mult de 10^{400} moduri diferite!). Vom demonstra acum cum se poate prescurta mult această parcurgere.

Să ne întoarcem din nou la figura 54. De la cel mai de jos rînd de căsuțe, corespunzător ultimei verificări, cea de-a cincea, pleacă $2^5 = 32$ săgeți. În cazul general, pentru k verificări, vor fi 2^k săgeți. Dacă modul de căutare înscris pe diagramă garantează distingerea bilelor radioactive, atunci fiecare dintre aceste săgeți corespunde numai la una dintre variantele posibile de răspuns: care anume două bile sînt radioactive (dar se poate ca diferite săgeți să corespundă la una și aceeași variantă). De aceea, numărul diferitelor variante posibile de răspuns nu va fi mai mare decît numărul săgeților, adică nu mai mare decît 2^k.

Să formulăm această considerație fundamentală astfel:

Dacă numărul variantelor posibile este mai mare decît 2^k, atunci nu există un mod care să permită ca din k verificări să separăm una dintre aceste variante.

La fel se poate spune astfel:

Dacă există un mod care să permită ca după k verificări să se aleagă o variantă din N posibile, atunci $N \leqslant 2^k$.
(Ultima inegalitate poate fi scrisă și astfel: $k \geqslant f_1(N)$).

Desigur, aceasta este o regulă aplicabilă la orice problemă unde se cere să se aleagă o variantă din N după rezultatele cîtorva verificări; ce este aici important este că *fiecare verificare are două rezultate posibile* (în problema noastră aceste rezultate sînt: „este radioactivitate" și „nu este radioactivitate"). În particular, din această regulă rezultă că nu se poate depista o bilă radioactivă din n cu mai puțin decît $f_1(n)$ verificări: dacă $f_1(n) = k$, atunci $2^{k-1} < n$, și există n variante diferite în această problemă (este radioactivă prima bilă, este radioactivă a 2-a bilă, .., este radioactivă a n-a bilă).

Să ne întoarcem din nou la problema în care sînt două bile radioactive. Cîte variante posibile sînt aici? În figura 54 în care am ales 2 bile din 7, numărul variantelor este egal cu 21. În cazul general există $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ variante de alegere a 2 bile din n. Din regula noastră de bază menționată mai sus rezultă că dacă e posibil ca după k verificări să se aleagă 2 bile din n, atunci $\frac{n(n-1)}{2} \leqslant 2^k$. Vom conveni să notăm cel mai mic număr de verificări necesar pentru alegerea a 2 bile din n prin $f_2(n)$. Atunci ultima inegalitate poate fi scrisă astfel:

$$f_2(n) \geqslant f_1\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\frac{n(n-1)}{2}$	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210	231	253	276	300
$f_1(n)$	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$f_1\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9
$f_2(n)$	2	3	4	5	5	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9	9

Din tabel se vede că pentru unii n (de exemplu, pentru $n = 6$, $n = 8$) este posibilă și o inegalitate strictă. Într-adevăr pentru ca după k verificări să se poată găsi 2 bile radioactive din n, trebuie îndeplinită inegalitatea $\frac{n(n-1)}{2} \leqslant 2^k$ ca o cerință minimă. Mai trebuie în plus ca acele variante pentru care prima verificare ar da rezultatul „+" (este radioactivitate) să nu fie mai multe decît 2^{k-1} și acele pentru care ar da rezultatul „—" (nu este radioactivitate) de asemenea să nu fie mai multe decît 2^{k-1}, căci altfel, după regula de bază, nu am putea după $a(k - 1)$ — a verificare să alegem din aceste variante una!. La fel, fiecărei dintre rezultatele „++" (prima verificare „+", a 2-a verificare „+"), „+—"· „—+", „——" nu trebuie să-i corespundă mai multe decît 2^{k-2} variante ș.a.m.d.

Cerința a) a problemei constă în $f_2(19) \leqslant 8$ iar b) este echivalentă cu $f_2(11) \geqslant 7$. Mai jos vom demonstra foarte pe scurt că $f_2(6) \geqslant 5$; $f_2(8) \geqslant 6$; $f_2(11) \geqslant 7$; $f_2(10) \leqslant 6$; $f_2(15) \leqslant 7$; $f_2(21) \leqslant 8$. Cititorii care doresc să se convingă că toate numerele din rîndul de jos al tabelului sînt corecte, trebuie să mai demonstreze în plus că $f_2(16) \geqslant 8$; $f_2(22) \leqslant 8$; $f_2(23) \geqslant 9$; $f_2(25) \leqslant 9$ (într-adevăr, este clar că funcția f_2 este nedescrescătoare, adică dacă $m \geqslant n$, atunci $f_2(m) \geqslant f_2(n)$, de aceea este suficient să se indice corect acele valori ale lui n pentru care $f_2(n+1)$ este strict mai mare decît $f_2(n)$).

Înainte de a demonstra inegalitățile menționate, să observăm că determinarea valorii exacte a lui $f_2(n)$ pentru orice n în această problemă, ca și în multe asemănătoare nu este prea interesantă. Aceasta pentru că modul corespunzător de depistare a bilelor, evident este prea complicat. Pe de altă parte este ușor să se indice algoritmi foarte simpli de depistare a bilelor care să necesite numai cu puțin mai multe decît $f_2(n)$ verificări. De exemplu, dacă la început se alege o bilă radioactivă, apoi se extrage și din cele rămase o alegem pe a doua, pentru aceasta ne trebuie nu mai mult decît $f_1(n) + f_1(n-1)$ verificări și cum nu e greu de demonstrat că diferența $f_1(n) + f_1(n-1) - f_1(C_n^2)$ este totdeauna nu mai mare decît 2 rezultă că diferența $f_1(n) + f_1(n-1) - f_2(n)$ de asemenea nu este mai mare decît 2. În probleme practice asemănătoare acesteia, dacă numărul verificărilor k nu este prea mic, o verificare sau două în plus nu joacă un rol prea mare dacă mijlocul de verificare este mai simplu (pentru $n = 15$ o schemă ca cea din figura 54 nu ar încăpea pe o pagină și urmărirea descrierii procedeului de verificare nu ar fi fost ușoară).

Din 4 verificări nu se pot alege 2 bile din 6.

Se verifică întîi căsuța făcută din 6-q bile, unde $q = 2, 3, 4$ sau 5. Atunci rezultatului „—" îi corespund C_q^2 variante (ambele bile radioactive printre celelalte q) rezultatului „+" îi corespund $C_6^2 - C_q^2$ variante. Unul dintre aceste numere este mai mare decît $2^3 = 8$.

Din 5 verificări nu se pot alege 2 bile din 8.

Dacă

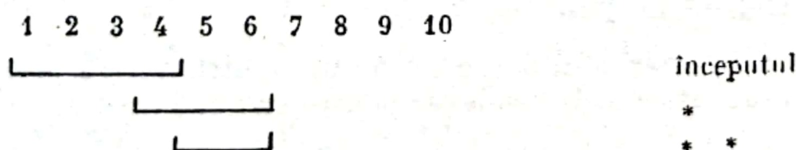
$$C_q^2 < 2^4 = 16 \qquad \text{și} \qquad C_8^2 - C_q^2 < 16,$$

atunci q poate să fie egal numai cu 6. Dacă rezultatul este „—" atunci ar rămîne să se aleagă 2 bile din 6, ceea ce nu e posibil din 4 verificări.

Din 6 verificări nu se pot alege 2 bile din 11.

Dacă $C_q^2 < 2^5 = 32$ și $C_{11}^2 - C_q^2 < 32$, atunci $q = 8$, dar $f_2(8) \geqslant 6$.

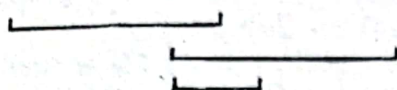
Din 6 verificări se pot alege 2 bile din 10.



Prima verificare la căsuța formată din 4 bile (1—4). Dacă dă „—", atunci rămîne ca din 5 verificări să stabilim 2 bile din 6, (5—10), dacă dă „+", verificăm căsuța (4—6). Dacă obținem „+—" putem ca din 4 verificări să obținem 2 bile din 7 (1—3, 7—10), știind că din (1—3) obținem „+" dacă obținem „++", verificăm (5—6). Dacă obținem „++—" rămîne ca din 3 verificări să găsim o bilă din (1—3, 7—10) iar dacă obținem „+++" găsim 1 bilă din (5—6) după o verificare și 1 bilă din (1—4) după 2 verificări.

După 7 verificări se pot alege 2 bile din 15

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

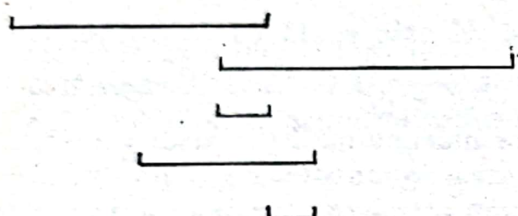


începutul
*
* *

Prima verificare (1—5). „+“ verificăm (5—9). „+ —“ după 5 verificări 2 bile din 10 (1—4, 10—15) dintre care (1—4) dau „+“ (vezi 10 bile, „+“). „++“ verificăm (5), „+++“ după 4 verificări 1 din (1—4, 6—15), „++—“ după 2 verificări 1 din (1—4) şi după 2 verificări 1 din (6—9).

După 8 verificări se pot alege 2 bile din 21.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21



începutul
*
* *
* * —
* * — *

Prima verificare (1—6). În afară de verificările indicate pe desen şi evidente mai indicăm „+—“ după 6 verificări 2 din 15 (1—5, 12—21) dintre care (1—5) dau „+“ (vezi 15 bile „+“), „++——“ după 2 verificări 1 din (1—4) şi după 2 verificări 1 din (8—11).

A.N. Vilenkin

M.29. *n monede identice sînt aşezate pe o masă formînd un lanţ închis (vezi figura 55)). Cîte învîrtituri trebuie să facă o monedă de aceeaşi dimensiune dacă ea se rostogoleşte pe partea exterioară a întregului lanţ, aşa cum se vede pe figură? Cum se modifică rezultatul dacă moneda M va avea o rază de k ori raza monedelor din lanţ?*

Vom lua raza monedelor din care este făcut lanţul ca unitate. Din figura 56 se vede că în timp ce moneda de rază k se rostogoleşte pe arcul α al unui cerc fix de rază 1, ea se roteşte cu unghiul $\alpha\,(1 + 1/k)$.; în acest desen razele

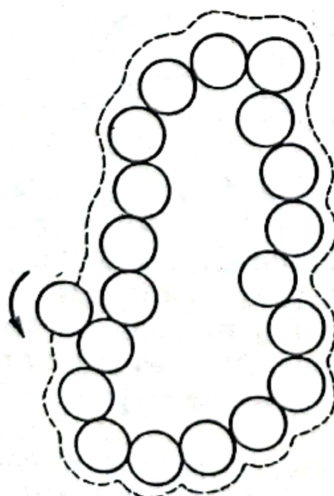


Fig. 55

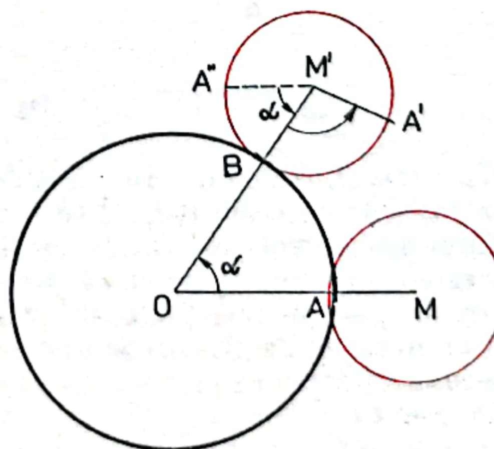


Fig. 56

MA şi $M'A''$ sînt paralele, $< A''M'B = < AOB = \alpha$ şi întrucît arcele $\widehat{A'B}$ şi $\widehat{AB}$ sînt egale ca lungime, $< BMA' = \alpha/k$, prin urmare întregul unghi $< A''MA'$ cu care s-ar roti moneda M este egal cu $\alpha + \alpha/k$ (în particular pentru $k = 1$ pentru acest unghi este egal cu 2α).

Acum vom găsi suma arcelor determinate de acele puncte ale monedelor fixe, pe care moneda M le atinge prin rostogolirea pe lanţ. Fie $O_1, O_2, \ldots, O_n$ centrele monedelor lanţului. Suma arcelor situate în interiorul poligonului $O_1O_2 \ldots O_n$, este egală cu suma unghiurilor sale interioare, adică $(n - 2)\pi$. Suma arcelor situate în afara poligonului, prin urmare va fi egală cu $2n\pi - (n - 2)\pi = (n + 2)\pi$. Din ea mai trebuie scăzută încă suma arcelor situate în adînciturile dintre două monede vecine, în care M nu pătrunde. În fiecare dintre aceste n adîncituri suma a două astfel de arce este egală cu $2\pi/3$ pentru $k = 1$ (figura 57, a) şi $2 \arccos \frac{1}{k+1}$ în cazul general (figura 57, b). Astfel suma arcelor pe care se rostogoleşte moneda M este egală cu $(n + 2)\pi - 2n\pi/3$ $\left(\text{în cazul general } (n + 2)\pi - 2n \arccos \frac{1}{k+1}\right)$. Ca să se afle numărul învîrtiturilor trebuie să se înmulţească această mărime cu 2 (în cazul general cu $1 + 1/k$) şi să se împartă la 2π.

Răspuns $\left(\frac{n}{3} + 2\right)$ învîrtituri pentru $k = 1$; $\frac{k+1}{2k}\left(n - \frac{2}{\pi} n \arccos \frac{1}{k+1} + 2\right)$ învîrtituri în cazul general $(n \geqslant 3)$.

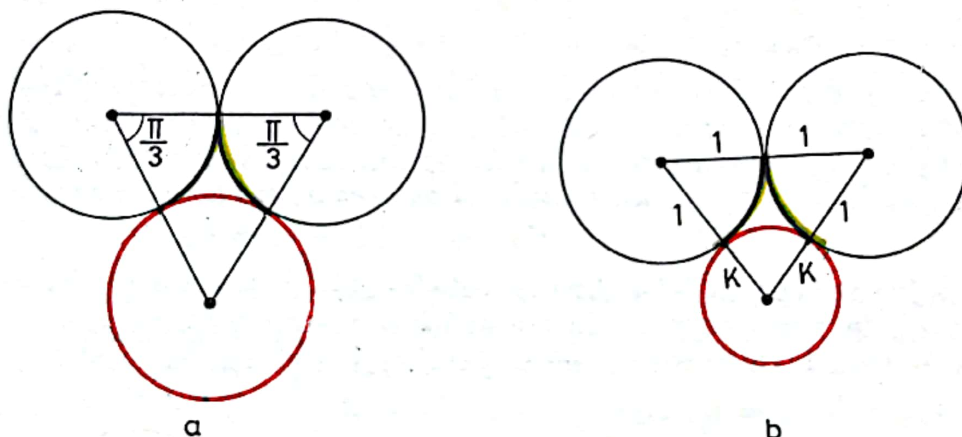


Fig. 57, a, b

În această rezolvare am considerat că moneda se rostogoleşte pe toate cele n monede succesiv (ţinînd cont de „pierderile" din adîncituri) fără excepţie. Cum a observat just rezolvitorul A. Virovlianski din Gorki, această condiţie este obligatorie pentru ca problema să aibă un răspuns precis. Pentru lanţuri cu „pătrunderi înguste" (vezi figura 58) nu se poate stabili numai după numărul n, de cîte ori se învîrteşte moneda M. O condiţie suficientă dar nu necesară pentru ca problema să fie rezolvabilă, este ca poligonul $O_1O_2 \ldots O_n$ să fie convex.

Gîndiţi-vă cum s-ar rezolva problema dacă în locul unui lanţ închis ar fi numai o monedă, apoi două monede tangente între ele şi în general un lanţ neînchis format din n monede $O_1, \ldots, O_n$, în care O_k se atinge de O_{k+1},

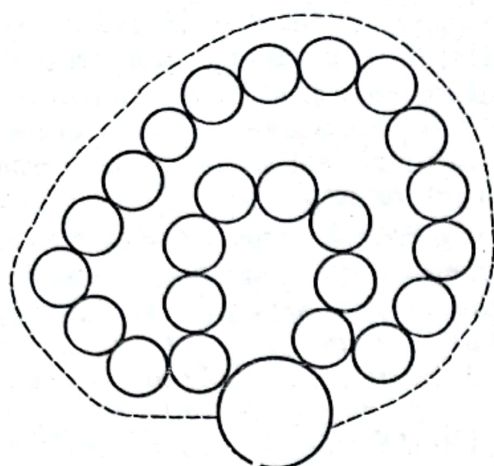


Fig. 58

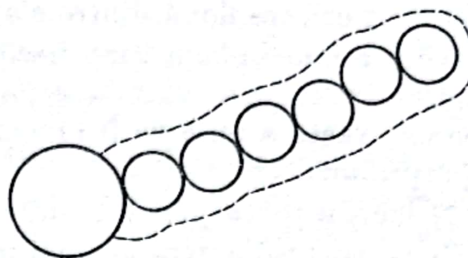


Fig. 59

astfel situate încît M se poate rostogoli înainte şi înapoi pe toate monedele în ordinea $O_1, O_2, \ldots O_{n-1}, O_n, O_{n-1}, \ldots O_1$ (vezi figura 59). (*Indicaţie.* Este suficient să se înlocuiască în formulele de mai sus n cu $2n - 2$.)

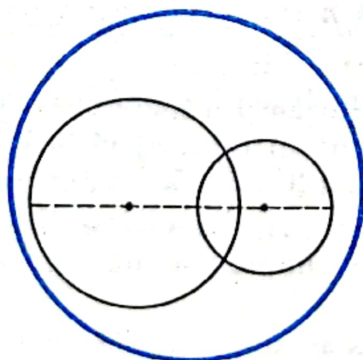
M 30. *Să se demonstreze că orice N puncte din plan pot să fie totdeauna acoperite cu un anumit număr de cercuri a căror sumă a diametrelor este mai mică decît N, iar distanţa între oricare două este mai mare decît 1. (Prin distanţa dintre două cercuri se înţelege distanţa dintre punctele lor cele mai apropiate.)*

V.I. Arnold

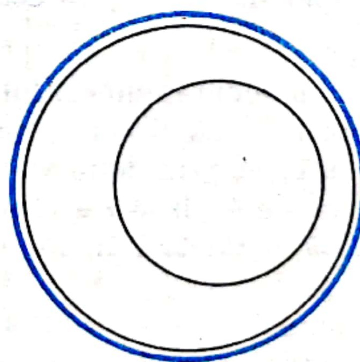
Ne este utilă următoarea lemă evidentă.

Dacă două cercuri de diametre d_1 şi d_2 se intersectează (au un punct comun) atunci ele pot fi incluse într-un cerc de diametru nu mai mare decît $d_1 + d_2$ (vezi figurile 60, a şi b).

Vom construi cîte un cerc cu centrul în fiecare dintre cele N puncte date care să aibă raza egală cu a (a mai mare decît $^1/_2$; valoarea exactă a lui a o vom preciza mai jos). Dacă printre aceste cercuri există unele care se intersectează, atunci folosind lema vom înlocui oricare două astfel de cercuri prin cercul care le cuprinde. Dacă printre cercurile obţinute se găsesc din nou cercuri care se intersectează, aplicăm iar lema ş.a.m.d. Deci în general va exista un anumit sistem de cercuri cu proprietăţile: 1) acoperă toate punctele date



a



b

Fig. 60, a, b

împreună cu cercurile de rază a cu centrele în aceste puncte şi 2) au suma diametrelor mai mică sau egală cu $N \cdot 2a$. Dacă printre acestea se găsesc din cele care se intersectează, atunci putem utiliza lema şi să construim un nou sistem format dintr-un număr mai mic de cercuri care să satisfacă aceleaşi condiţii 1) şi 2) şi astfel pînă la urmă obţinem un sistem format din k cercuri astfel încît oricare două dintre ele nu se mai intersectează.

Vom micşora acum raza fiecăruia dintre aceste k cercuri cu mărimea b lăsînd centrele lor neschimbate (b este mai mare decît $1/2$ şi mai mic decît a; valoarea exactă a lui b va fi precizată mai jos). Atunci cele k cercuri obţinute au proprietăţile:

1) conţin toate punctele date;

2) au suma diametrelor mai mică sau egală cu $N \cdot 2a - k \cdot 2b \leqslant 2Na - 2b$;

3) sînt distanţate între ele cu cel puţin $2b$.

E clar că dacă alegem a şi b astfel încît să fie satisfăcute inegalităţile $b < a$; $2Na - 2b < N$, $2b > 1$, atunci toate cerinţele problemei vor fi satisfăcute. Ar fi suficient, de exemplu, să se ia de la început $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}$ şi $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{4N}$.

Aceste valori ale lui a şi b au această formă numai pentru că în problemă s-a cerut să se îndeplinească nişte inegalităţi stricte suma diametrelor mai mică decît N, distanţa dintre cercuri mai mare decît 1. Dacă am fi luat $a = b = 1/2$, s-ar putea demonstra că cele N puncte s-ar putea acoperi cu k cercuri (un anumit k), astfel încît distanţa dintre cercuri să nu fie mai mică decît 1, iar suma distanţelor să nu fie mai mare decît $N - k$. Să remarcăm că întrucît această afirmaţie se demonstrează pentru orice unitate de măsură, atunci (alegînd această unitate ceva mai mică) din ea se poate deduce uşor afirmaţia formulată în problemă.

N.B. Vasiliev

M 31. *O foaie de hîrtie de formă pătrată se taie după o dreaptă în două bucăţi. Una dintre bucăţile obţinute se taie din nou în două şi se procedează aşa de mai multe ori. Care este numărul minim de tăieturi care trebuie efectuate pentru ca printre bucăţile obţinute să fie o sută de poligoane cu douăzeci de laturi.*

I. Berştein

La fiecare tăietură, numărul total de bucăţi creşte cu 1 (pentru că dispare o bucată şi apar două noi), de aceea după n tăieturi vor fi $n+1$ bucăţi de hîrtie.

Să evaluăm acum numărul total al vîrfurilor din toate bucăţile împreună după n tăieturi. După fiecare tăietură numărul total al vîrfurilor creşte fie cu 2 (dacă s-a tăiat prin două vîrfuri), fie cu 3 (dacă s-a tăiat printr-un vîrf şi o latură), fie cu 4 (dacă s-a tăiat prin 2 laturi). Fiindcă la început au fost 4 vîrfuri, după n tăieturi în toate bucăţile împreună nu sînt mai mult de $4n + 4$ vîrfuri.

Să presupunem că după N tăieturi s-au obţinut 100 de poligoane cu douăzeci de laturi. Fiindcă prin aceasta numărul total al bucăţilor obţinute va fi $N + 1$, rezultă că în afara acestor poligoane vor mai fi $N + 1 - 100$ bucăţi. Fiecare dintre aceste bucăţi va avea cel puţin trei vîrfuri de aceea

numărul total al vîrfurilor în toate bucăţile va fi cel puţin $100 \cdot 20 + (N - 99) \cdot 3$. Cum s-a demonstrat mai sus acest număr nu e mai mare decît $4N + 4$. Deci

$$4N + 4 \geqslant 100 \cdot 20 + (N - 99) \cdot 3 = 3N + 1703$$

de unde $N \geqslant 1699$.

Astfel am demonstrat că nu se pot obţine 100 de poligoane cu douăzeci de laturi făcînd mai puţin de 1699 tăieturi. Aceasta este partea principală şi cea mai dificilă a demonstraţiei.

Să arătăm acum cum se pot obţine 100 de poligoane cu douăzeci de laturi efectuînd 1699 tăieturi. Iată unul dintre moduri: tăiem pătratul în 100 de dreptunghiuri (99 tăieturi) şi fiecare dreptunghi prin 16 tăieturi îl transformăm în poligon cu douăzeci de laturi, tăind din colţuri triunghiuri (1600 tăieturi). În total 1699 tăieturi.

La fel se poate evalua numărul minim de tăieturi pentru a se obţine exact k poligoane cu m laturi.

I.N. Bernstein

M 32. *În toate căsuţele unui tablou de 100×100 sînt scrise plusuri. Se convine să se schimbe concomitent semnele în toate căsuţele unei linii sau unei coloane. Se poate ca, efectuînd aceste operaţii de mai multe ori, să se obţină un tablou în care să fie exact 1970 de minusuri?*

A. Zelevinschi

Presupunem că pe linia i am schimbat semnul de x_i ori şi în coloana k de y_k ori. Atunci în căsuţa situată la intersecţia liniei i cu coloana k semnul se va schimba de $x_i + y_k$ ori. Prin urmare, în această căsuţă semnul va fi minus atunci şi numai atunci cînd $x_i + y_k$ este impar. Astfel numărul total de minusuri în tabloul obţinut va depinde numai de paritatea numerelor x_i şi y_k; în figura 61, în locul numerelor pare s-au pus zerouri iar în locul celor impare — unităţi. Fie x numărul numerelor impare printre x_i şi y numărul numerelor impare printre y_k (pe desen $x = 5$, $y = 4$). Atunci, cum se poate calcula uşor, numărul total al minusurilor din tablou va fi egal cu

$$x\,(100 - y) + (100 - x)y = 100x + 100y - 2xy \text{ unde } x,\ y \text{ sînt întregi.}$$

	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	−
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	−
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
1	−	+	+	−	+	+	−	−	−	−
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
1	−	+	+	−	+	+	+	−	−	−
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+
0	+	−	−	+	−	−	−	+	+	+

Fig. 61

Acum să ne întoarcem la problema noastră şi să demonstrăm că nu are soluţie, adică nu se pot obţine 1970 de minusuri. Să presupunem că am reuşit să obţinem 1970 de minusuri. Atunci $1970 = 100x + 100y - 2xy$, de unde

$$xy - 50x - 50y + 2500 = 1515.$$

Descompunînd partea stîngă în factori, vom obţine

$$(x - 50)(y - 50) = 1515 = 15 \cdot 101.$$

Avem $-50 \leqslant x - 50 \leqslant 50$,

$$-50 \leqslant y - 50 \leqslant 50$$

Întrucît numărul 101 este prim, rezultă că sau $x - 50$ sau $y - 50$ trebuie să se dividă la 101 (căci produsul lor se împarte la 101). Dar din inegalitățile precedente rezultă că atunci $x - 50$ sau $y - 50$ este egal cu 0. Astfel am obținut o contradicție care demonstrează că nu se pot obține exact 1970 de minusuri.

A.V. Zelevinski

M 33. *Se dă un număr natural $n > 1000$. Vom lua resturile împărțirilor numărului 2^n la numerele 1, 2, 3, ..., n și vom găsi suma acestor resturi. Să se arate că această sumă este mai mare decît $2n$.*

A. Kușnirenko

Vom nota suma resturilor împărțirilor numărului 2^n prin S_n. Întărim afirmația problemei și vom demonstra că pentru $n > 1000$, $S_n > 3{,}5n$. Prin aceeași metodă vom demonstra că

$$S_n > \frac{n}{2}(\log_2 n - 4)$$

pentru orice n.

Vom urmări în esență rezolvarea lui D. Grigoriev din Leningrad. Rezolvarea se bazează pe o considerație foarte simplă: 2^n nu se împarte exact la nici un număr impar cu excepția lui 1, deci restul împărțirii lui 2^n la un astfel de număr nu este mai mic decît 1. De aici se deduce ușor, că pentru orice număr impar $k > 1$, resturile împărțirii lui 2^n la $2^l k$, nu sînt mai mici decît 2^l. Într-adevăr fie restul împărțirii lui 2^{n-l} prin k egal cu r, adică $2^{n-l} = mk + r$, unde $0 \leqslant r < k$, atunci $2^n = m(2^l k) + 2^l r$ unde $0 \leqslant 2^l r \leqslant 2^l k$ adică restul împărțirii lui 2^n prin $2^l k$ este egal cu $2^l r$ și fiindcă $r \neq 0$, acest rest nu e mai mic decît 2^l.

De aici rezultă că, în orice caz $S_n \geqslant 1\cdot$(numărul numerelor de forma $2k + 1$ care nu-l depășesc pe n, $k > 1$) $+ 2\cdot$(numărul numerelor de forma $2(2k + 1)$ care nu-l depășesc pe n, $k > 1$) $+ 2^2\cdot$(numărul numerelor de forma $2^2(2k + 1)$ care nu-l depășesc pe n, $k > 1$) $+ \ldots + 2^l\cdot$(numărul numerelor de forma $2^l(2k + 1)$, $k > 1$) (*) unde l este determinat de condițiile $3\cdot 2^l \leqslant n$, $3\cdot 2^{l+1} > n$ (nu are sens să se ia l mai mare fiindcă atunci expresia din paranteză va fi egală cu zero).

Ce se poate spune despre partea dreaptă a acestei inegalități?

Să considerăm al $(i + 1)$-lea termen: $2^i(\ldots)$. Numărul din paranteză este egal, evident, cu numărul termenilor care nu depășesc pe n din progresia aritmetică 3, 2^i, $5\cdot 2^i$, $7\cdot 2^i$, ... adică progresia cu primul termen $3\cdot 2^i$ și rația $2\cdot 2^i$. Numărul acestor termeni este de cel puțin $\frac{n - 3\cdot 2^i}{2^{i+1}}$ și, prin urmare al i-lea termen al părții drepte a inegalității este cel puțin $\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\cdot 2^i$. În esență rezolvarea problemei e terminată. Restul reprezintă diferite transformări ale părții din dreapta a formulei (*) cu ajutorul inegalităților obținute. Vom înlocui, de exemplu, suma în partea dreaptă a lui (*) cu primii opt termeni. Atunci obținem;

$$S_n > 8\cdot\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\sum_{i=0}^{l} 2^i > 8\cdot\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\cdot 2^8 = 3{,}5n + \left(\frac{n}{2} - 384\right).$$

Pentru $n > 1000$ expresia din paranteză este pozitivă şi deci am demonstrat că $S_n > 3{,}5n$ pentru $n > 1000$. Astfel că problema **M 33** este rezolvată complet.

Dar se poate obţine o inegalitate mai precisă. Însumînd toţi termenii părţii drepte a lui (*), obţinem:

$$S_n > (l+1)\frac{n}{2} - \frac{3}{2}\sum_{i=0}^{l} 2^i > (l+1)\frac{n}{2} - \frac{3\cdot 2^{l+1}}{2}.$$

Utilizînd inegalităţile $3\cdot 2^l \leqslant n$, $3\cdot 2^{l+1} > n$, vom găsi că

$$S_n > \frac{n}{2}\log_2\frac{n}{3} - n = \frac{n}{2}\left(\log_2\frac{n}{3} - 2\right) > \frac{n}{2}(\log_2 n - 4).$$

Această formulă arată, de exemplu, că dacă $n > 2^{1004}$ atunci $S_n > 500n$.

P r o b l e m ă. Suma resturilor împărţirii numerelor $2^{l+1}\cdot 2^{l+1}$ la un număr impar $m > 1$, este mai mare decît $\frac{m}{2}\left(\frac{L}{\log_2 2m} - 1\right)$. Cu ajutorul acestei probleme a cărei rezolvare va fi dată mai jos, se poate demonstra că pentru un număr nesfîrşit de valori ale lui n, suma S_n este cu mult mai mare decît $\frac{n}{2}(\log_2 n - 4)$, adică se poate demonstra că evaluarea $S_n > \frac{n}{2}(\log_2 n - 4)$ este foarte grosolană (cel puţin pentru un număr nesfîrşit de valori ale lui n). Aceasta nu e de mirare, deoarece metoda noastră de demonstraţie nu a ţinut seama de multe circumstanţe. De exemplu, am folosit numai faptul că resturile împărţirii lui 2^n la numere impare sînt nenule, în timp ce aceste resturi sînt destul de mari. Mărimea S_n nu poate creşte prea repede odată cu creşterea lui n fiindcă e evident că $S_n \leqslant 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Ni se pare probabilă următoarea ipoteză:

I p o t e z a I. Pentru n suficient de mare este adevărată inegalitatea $S_n \leqslant \frac{n^2}{4}$.

b) există un număr pozitiv $c > 0$, astfel încît $cn^2 \leqslant S_n$.

Nu ştim nici să demonstrăm nici să infirmăm aceste afirmaţii. Mai mult, nu ştim dacă este adevărată următoarea (mai slabă) ipoteză:

I p o t e z a a II-a. Există un număr pozitiv $c > 0$, astfel încît inegalitatea $cn^2 \leqslant S_n$ este îndeplinită pentru un număr nesfîrşit de valori ale lui n.

Ca o afirmaţie mai slabă decît cea a ipotezei 2 se poate demonstra următoarea teoremă.

T e o r e m ă. Pentru un număr nesfîrşit de valori ale lui n este îndeplinită inegalitatea

$$S_n > \frac{n^2}{132\log_2 n}$$

(numărul $\frac{n^2}{132\log_2 n}$ pentru valori mari ale lui n este cu mult mai mare decît numărul $\frac{n}{2}(\log_2 n - 4)$. Se poate arăta uşor că pentru valori destul de mari ale lui n, raportul acestor două numere este mai mare decît n).

Teorema se deduce din problemă în felul următor. Să considerăm suma Σ_k a resturilor împărţirii numerelor $2^{k+1}, \ldots, 2^n$ la numărul k. Conform problemei, pentru k impar suma Σ_k este destul de mare şi de aceea şi numărul $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_n$ este mare.

Dar, cum se observă uşor, $S_1 + S_2 + ... + S_n = \Sigma_1 + \Sigma_2 + ... + \Sigma_n$, de aceea suma din partea stîngă este de asemenea mare şi înseamnă că unul dintre termeni, să zicem S_i este tot mare. Demonstraţia formală o propunem cititorului. Trecem acum la rezolvarea problemei.

Rezolvarea problemei. Vom scrie resturile împărţirilor numerelor 2^{l+1}, ..., 2^{l+L}, la m şi vom pune între două resturi consecutive o" bară " dacă primul este mai mare decît al doilea. Atunci, în primul rînd restul situat înainte de „bare" este mai mare decît $m/2$, în al doilea rînd numărul numerelor cuprinse între două „bare" consecutive este mai mic decît $\log_2 2m$ fiindcă resturile dintre două „bare" formează o progresie geometrică cu raţia 2 (într-adevăr $2^{\log_2 2m-1} = m > m - 1$, şi orice rest nu e mai mare decît $m - 1$). Astfel, numărul intervalelor dintre „bare" este mai mare decît $\frac{L}{\log_2 2m} - 1$ şi fiindcă fiecare interval se termină cu un număr mai mare decît $m/2$, totul este demonstrat.

A.G. Kuşnirenko

M 34. *Să se demonstreze că dacă un număr natural se împarte la 10101010101, atunci în scrierea sa zecimală există cel puţin şase cifre diferite de zero.*

A. Tolpîgo

Problema se rezolvă foarte uşor dacă numărul A care se împarte la 10101010101 are cel mult 12 cifre; atunci el are în mod obligatoriu forma *abababababab* şi problema e rezolvată.

Rămîne să găsim un mod de a reduce problema la acest caz.

Notăm numărul 10101010101 prin M. Vom demonstra că dacă numărul A se divide la M, atunci se găseşte un număr cu douăsprezece (sau cu mai puţine) cifre C, care de asemenea se împarte la M şi care are nu mai multe cifre nenule decît A.

Lemă. Dacă A se divide prin M şi are mai mult de 12 cifre (considerînd şi zerourile), atunci se găseşte un număr B care de asemenea se împarte la M, mai mic decît A şi care nu are mai multe cifre nenule decît A.

Să demonstrăm aceasta. Fie $A = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$; detaşăm prima sa cifră a_1 şi o adăugăm cu 12 ordine mai jos, de exemplu

$$\begin{array}{r} 123\,456789\,123\,456 \to 23\,456\,789\,123\,456 \\ + \qquad\qquad 1 \\ \hline 23\,456\,789\,123\,556 \end{array}$$

Numărul obţinut va fi, fără îndoială, mai mic decît cel iniţial: se poate verifica uşor că pur şi simplu am scăzut, din numărul A, numărul $a_1 \cdot (10^{n-1} - 10^{n-13})$. În paranteză este produsul $10^{n-13} \cdot (10^{12} - 1)$; al doilea factor evident se divide prin A (este un număr format din 12 de nouă), aşa că diferenţa se divide prin A. Rămîne să observăm că în numărul obţinut nu sînt mai multe cifre semnificative decît în cel iniţial. În exemplul nostru ele chiar s-au micşorat cu una; aceasta s-ar putea să nu se întîmple dacă în poziţia a 13-a ar sta 0 sau dacă acolo ar fi o cifră destul de mare şi pe locul precedent 0, aşa ca în exemplul:

$$\begin{array}{r} 888\,888\,888\,880\,421 \to 88\,888\,888\,880\,421 \\ + \qquad\qquad 8 \\ \hline 88\,888\,888\,881\,\,221 \end{array}$$

(n-am considerat încă situaţie în care schimbarea se produce şi la ordinul al 12-lea dar se vede uşor că atunci numărul cifrelor semnificative se micşorează). Lema e demonstrată.

Acum dacă A se divide prin M, vom scădea din A prima sa cifră, înmulţită cu $10^{n-13} \cdot (10^{12} - 1)$. Cu numărul obţinut facem aceeaşi operaţie şi vom proceda tot aşa pînă cînd ajungem la un număr cu 12 cifre. Fiindcă el are cel puţin şase cifre semnificative atunci şi A are cel puţin şase cifre semnificative.

Majoritatea rezolvitorilor au încercat să examineze cîtul împărţirii lui A la M; dar rezolvarea în felul acesta este foarte grea, întrucît la operaţia inversă de înmulţire a acestui cît cu 10101010101 cifrele sale „se lipesc" unele de altele, se pot întîmpla multe treceri ale unităţilor la alte ordine şi este aproape imposibil să se analizeze ceea ce s-a obţinut. Ideea rezolvării constă în a evalua aceste transferări una cîte una.

A.K. Tolpîgo

M 35. *O sferă de rază egală cu 10 este înscrisă într-un poliedru cu 19 feţe. Să se arate că pe suprafaţa sa se pot găsi două puncte astfel încît distanţa între ele să fie mai mare decît 21.*

A. Kuşnirenko

P r i m a   r e z o l v a r e. Presupunem contrariul, adică faptul că distanţa dintre oricare două puncte ale suprafeţei poliedrului cu 19 feţe nu e mai mare decît 21. *Atunci* acest poliedru va fi situat în interiorul unei sfere de rază 11 concentrică cu sfera de rază 10 şi fiecare faţă a sa va fi situată între sfere. *De aceea* aria fiecărei feţe nu este prea mare şi anume nu depăşeşte aria cercului indicat în figura 62 de rază $\sqrt{21}$. Fiind 19 feţe în poliedrul nostru, aria sa nu va depăşi $19\pi(\sqrt{21})^2 = \pi(20^2 - 1^2) = 399\pi$. Dar poliedrul admite o sferă înscrisă de rază 10. *De aici* rezultă că aria sa este mai mare decît aria acestei sfere $4\pi 10^2$. Astfel, pe de o parte $S < 399\pi$, pe de alta $S > 400\pi$. Contradicţia obţinută rezolvă problema.

În această rezolvare (neriguroasă) am omis demonstraţiile celor trei afirmaţii care începeau cu cuvintele subliniate: atunci, de aceea, de aici. Lăsăm cititorului aceste demonstraţii simple dar vrem să-l prevenim că deşi a treia afirmaţie se demonstrează uşor pentru un poliedru convex prin comparaţia volumului său cu volumul sferei (într-adevăr, volumul poliedrului este egal cu $\frac{R \cdot S}{3}$ unde R este raza sferei înscrise, iar S aria suprafeţei sale) şi este intuitiv clar că poliedrul nostru este convex, este greu de demonstrat riguros fiindcă însăşi definiţia riguroasă a poliedrului este foarte complicată (Vezi de exemplu, cartea lui I. Lakatos „Demonstraţii şi desminţiri", Moscova, „Nauka", 1967).

R e z o l v a r e a   a   d o u a. Să punem o chestiune mai generală: ce număr minim de feţe poate să aibă un poliedru care admite o sferă înscrisă de rază r şi este situat complet într-o sferă concentrică cu aceasta de rază $R > r$ (Iată şi situaţia reală care i-a sugerat autorului această problemă: cu ce număr minim de tăieturi drepte de cuţit poate fi luată coaja unei portocale netăind nici una dintre feliile miezului? Evident că după luarea în acest mod a stratului superior al coajei ce rămîne are forma unui

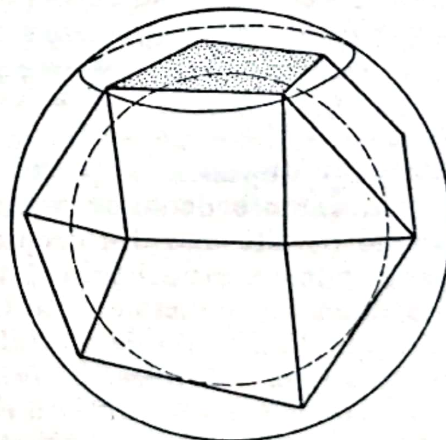


Fig. 62

poliedru fiindcă pe suprafaţa sa nu mai rămîne nici o porţiune rotunjită, deci problema este echivalentă cu cea dată.

Nu ştim răspunsul exact la această problemă mai generală, dar vom demonstra pentru numărul feţelor o anumită limitare care pentru $r = 10$ şi $R = 11$ va arăta că $N > 22$. Astfel vom arăta că, dacă în datele problemei **M 35** în loc de un poliedru cu 19 feţe se ia un poliedru cu 22 de feţe, afirmaţia problemei rămîne adevărată.

Astfel, fie un poliedru cu N feţe care admite o sferă înscrisă de rază r şi este situat în întregime într-o sferă de rază R. Să examinăm o faţă de a sa. Planul care trece prin ea decupează din sferă o „căciulă" (calotă sferică) de înălţime $R - r$. E clar că dacă se construiesc calote pentru toate feţele poliedrului, reuniunea lor acoperă toată suprafaţa sferei exterioare. Aria unei calote este $2\pi R(R - r)$. Suma ariilor tuturor calotelor este mai mare decît aria sferei, de aceea $N = 2\pi R(R - r) > 4\pi R^2$ de aici $N > \frac{2R}{R-r}$, în particular pentru $R = 11$, $r = 10$ obţinem $N > 22$.

E interesant că pentru orice alegere de calote care acoperă în întregime sfera exterioară, se poate construi un poliedru care să admită sfera dată ca sferă înscrisă (Demonstraţi!). De aceea problema noastră privind numărul minim de feţe este complet echivalentă cu următoarea. Care este numărul minim $N = N(h)$ de calote sferice de înălţime h care acoperă în întregime o sferă de rază 1? $\left(\text{În problema } \mathbf{M\ 35},\ h = \frac{1}{11}\right)$.

Evident că $N(h) > \frac{2}{h}$ dar această inegalitate reflectă pur şi simplu faptul că suma ariilor calotelor este mai mare decît aria sferei, în timp ce intuitiv este clar că pentru $h < 1$ calotele trebuie să se acopere destul de mult. Într-adevăr, se poate demonstra că pentru h suficient de mici, $N(h) > 1{,}2\frac{2}{h}$. Încercaţi să demonstraţi singuri, de exemplu, că pentru $h < 1$,

$$N(h) > 1{,}001\,\frac{2}{h}$$

(În legătură cu rezolvarea acestei probleme şi a altora asemănătoare se poate vedea cartea lui L.F. Toth „Aranjarea în plan, pe sferă şi în spaţiu", Moscova, Fizmatghiz, 1958.)

A.G. Kuşnirenko

M 36. *Să se demonstreze că în plan nu se pot găsi şapte drepte şi şapte puncte, astfel încît prin fiecare punct să treacă trei drepte şi pe fiecare dreaptă să fie situate trei puncte.*

Să presupunem că o astfel de aşezare a celor şapte puncte şi şapte drepte există. Înainte de toate vom arăta că oricare două din punctele date sînt situate pe cîte una din dreptele date. Într-adevăr, dacă A este unul dintre aceste puncte, atunci prin A trec trei drepte şi pe fiecare dintre ele se găsesc cîte două din punctele date (în afară de A); Astfel A şi oricare dintre cele şase puncte diferite de A sînt situate pe una dintre dreptele date. La fel se demonstrează că fiecare două dintre dreptele date se intersectează în unul dintre punctele date: dacă a este una dintre drepte, atunci prin fiecare dintre cele trei puncte situate pe ea trec cîte două drepte (în afară de a) şi de aceea fiecare dintre aceste drepte se intersectează cu a într-unul dintre punctele date.

Să considerăm acum *înfăşurătoarea convexă* a mulţimii formate din cele şapte puncte, care este cea mai mică figură convexă care cuprinde aceste şapte puncte. Aceasta va fi un anumit poligon convex cu n laturi, unde $n \leqslant 7$ (el se poate obţine astfel: se bat cuişoare în cele şapte puncte şi apoi se întinde o bandă de cauciuc care cuprinde toate aceste cuişoare; firul se strînge după conturul unui poligon cu vîrfurile în n puncte din cele date, iar celelalte $7 - n$ puncte se găsesc în interior sau pe laturile acestui poligon; vezi figura 63). Este clar că $n \geqslant 4$ nu e posibil, căci pe fiecare latură a poligonului cu n laturi trebuie să mai fie un al treilea punct în afară de vîrfuri şi în total sînt şapte puncte. Cazul $n = 3$ cînd înfăşurătoarea convexă este un anumit triunghi ABC, e de asemenea imposibil. Într-adevăr, dacă E şi F sînt puncte (dintre cele şapte date) situate pe laturile AB şi BC, atunci EF şi AC două dintre dreptele date trebuie să se intersecteze pe prelungirea laturii AC, adică în afara triunghiului ABC, dar ele se intersectează în unul dintre cele şapte puncte. S-a obţinut o contradicţie.

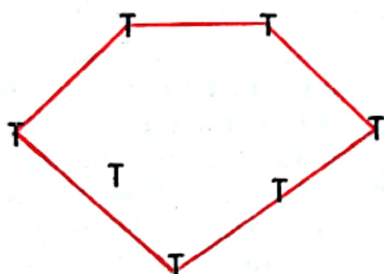


Fig. 63. Înfăşurătoarea convexă a unei mulţimi făcute dintr-un număr finit de puncte din plan este un poligon cu vîrfurile în unele dintre aceste puncte (sau un segment dacă toate punctele sînt pe o dreaptă)

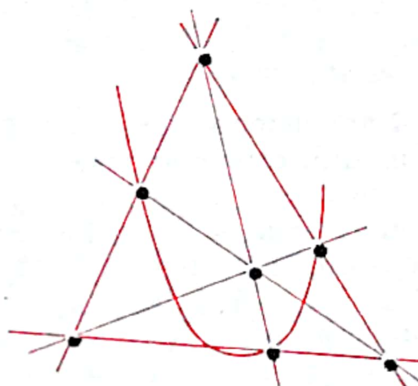


Fig. 64. Această configuraţie satisface aproape complet cerinţele problemei M 36, numai că una dintre „drepte" trebuie îndoită

M 37. *În fiecare pătrăţel al unei foi de hîrtie cu pătrăţele, infinită este scris un anumit număr, astfel încît suma numerelor din fiecare pătrat ale cărui laturi sînt determinate de liniile reţelei, în modul, nu depăşeşte unitatea. Să se demonstreze că atunci există un astfel de număr c, încît suma numerelor din orice dreptunghi, cu laturi determinate de liniile reţelei, nu e mai mare decît c; cu alte cuvinte că sumele cifrelor din toate dreptunghiurile sînt mărginite. Să se demonstreze că aceasta e adevărat pentru $c = 4$. Poate reuşiţi să îmbunătăţiţi această evaluare (de exemplu, să se demonstreze că afirmaţia este adevărată pentru $c = 3$ sau chiar $c = 2$).*

Iu. I. Ionin

Demonstrăm că $c = 4$ este bun.

Să presupunem că într-un anumit dreptunghi cu laturile a şi b suma în modul este egală cu $4 + \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$ $(a < b)$. Vom construi patru pătrate care au fiecare dintre ele cîte trei laturi făcînd parte dintre anumite trei laturi ale acestui dreptunghi $a \times b$. Atunci dreptele pe care sînt situate fiecare din cea de a patra latură a acestor pătrate, vor forma un nou dreptunghi cu laturile

5*

$2b - a$ şi $| 2a - b |$ (vezi figurile 65 şi 66) cazul $b = 2a$ desigur nu e posibil. Vom arăta că în acest nou dreptunghi suma numerelor în modul este mai mare sau egală cu $4 + 3\varepsilon$.

Putem considera că $s_4 + s_5 + s_6 = 4 + \varepsilon$ (dacă suma e egală cu $-(4 + \varepsilon)$ schimbăm semnele tuturor numerelor în cele contrare).

Considerăm la început cazul $b < 2a$. Atunci

$$s_5 = (s_4 + s_5) + (s_5 + s_6) - (s_4 + s_5 + s_6) \leqslant 1 + 1 - 4 - \varepsilon = -2 - \varepsilon$$
$$s_2 + s_8 = (s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6) + (s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 + s_9) -$$
$$- s_1 - s_3 - s_7 - s_9 - 2(s_4 + s_5 + s_6) \leqslant 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + -$$
$$- 2(4 + \varepsilon) = -2 - 2\varepsilon$$

de unde $s_2 + s_5 + s_8 \leqslant -4 - 3\varepsilon$.

Analog, dacă $b > 2a$, atunci

$$s_5 = -s_4 - s_6 + (s_4 + s_5 + s_6) \geqslant -1 - 1 + 4 + \varepsilon \geqslant 2 + \varepsilon$$
$$s_2 + s_8 = (s_1 + s_2) + (s_2 + s_3) + (s_7 + s_8) + (s_8 + s_9) - (s_1 + s_2 + s_3 +$$
$$+ s_4 + s_5 + s_6) - (s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 + s_9) + 2(s_4 + s_5 + s_6) \geqslant 2 + 2\varepsilon,$$
$$s_2 + s_5 + s_6 \geqslant 4 + 3\varepsilon.$$

Astfel am demonstrat că dacă într-un dreptunghi $a_1 \times b_1$ suma numerelor, în modul, este mai mare decît $4 + \varepsilon$, atunci într-un nou dreptunghi $a_2 \times b_2$ unde $a_2 = | 2a_1 - b_1 |$, $b_2 = 2b_1 - a_1$, suma numerelor, în modul, este mai mare decît $4 + 3\varepsilon$. Pentru dreptunghiul $a_2 \times b_2$ putem construi în acelaşi mod un dreptunghi $a_3 \times b_3$ în care suma numerelor va fi mai mare decît $4 + 3 \cdot 3\varepsilon = 4 + 9\varepsilon$ şi aşa mai departe un întreg şir de dreptunghiuri $a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, a_3 \times b_3, \ldots, a_n \times b_n, \ldots$ astfel încît în dreptunghiul $a_n \times b_n$ suma numerelor în modul este mai mare decît $4 + 3^{n-1}\varepsilon$. Să arătăm că în acest şir, toate dreptunghiurile începînd de la unul anumit vor fi de tipul al doilea, adică $b_n > 2a_n$. Într-adevăr, în primul rînd se verifică uşor că dacă

$$\frac{a_n}{b_n} < \frac{1}{2}, \text{ atunci şi } \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{b_n - 2a_n}{2b_n - a_n} < \frac{1}{2}.$$

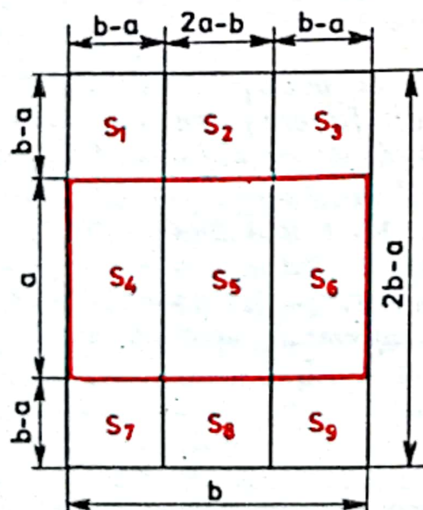


Fig. 65 $2a > b$

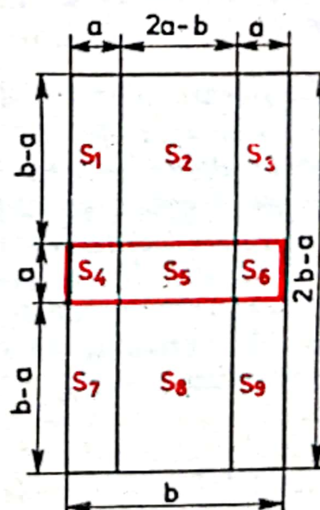


Fig. 66 $2a < b$. Dreptunghiul iniţial $a \times b$ este marcat cu roşu, cel nou $2a-b \times (2b-a)$ cu negru

În al doilea rînd, dacă $\frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{2}$, atunci

$$\frac{1-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}{1-\frac{a_n}{b_n}} = \frac{1-\frac{2a_n-b_n}{2b_n-a_n}}{1-\frac{a_n}{b_n}} = \frac{3b_n}{2b_n-a_n} > \frac{3b_n}{2b_n-\frac{b_n}{2}} = 2;$$

astfel mărimea

$$1-\frac{a_n}{b_n}$$

prin trecerea de la n la $n+1$ se măreşte cel puţin de două ori pînă cînd nu se ajunge la dreptunghiul cu $a_n/b_n \leqslant 1/2$. De aceea, oricît de mic ar fi $1-\frac{a_1}{b_1}$, totdeauna după un număr de operaţii nu mai mare decît $-1-\log_2(1-a_1/b_1)$ ajungem la un dreptunghi de al doilea tip şi în continuare în şir se întîlnesc numai astfel de dreptunghiuri.

De aceea putem considera că deja $\frac{a_1}{b_1} < \frac{1}{2}$. Atunci

$$a_3 = b_2 - 2a_2 = (2b_1 - a_1) - 2(b_1 - 2a_1) = 3a_1.$$
$$b_3 = 2b_2 - a_2 = 2(2b_1 - a_1) - (b_1 - 2a_1) = 3b_1.$$

Prin urmare, în general $a_{2k+1} = 3^k a_1$ şi $b_{2k+1} = 3^k b_1$, iar suma numerelor în acest dreptunghi $3^k a_1 \times 3^k b_1$ este mai mare decît $4 + 9^k\varepsilon$, adică alegînd pe k suficient de mare putem să o facem oricît de mare. Acum nu e greu

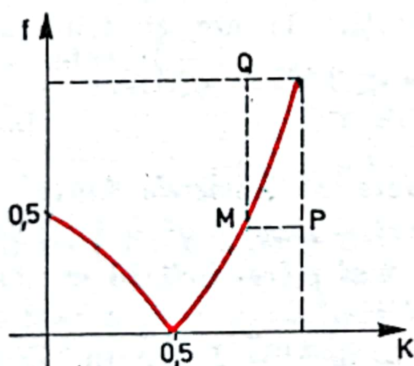
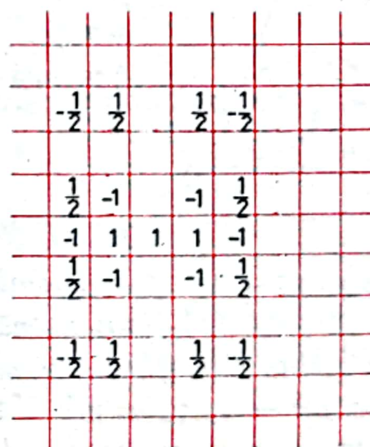


Fig. 67. Fie $k_n = a_n/b_n$. Atunci $k_{n+1} = f(k_n)$, unde $f(k) = \frac{|1-2k|}{2-k}$. Reprezentăm aici graficul acestei funcţii pe segmentul $0 \leqslant k \leqslant 1$. În rezolvarea problemei am folosit faptul că pentru orice punct M din jumătatea din dreapta a graficului $MQ/MP > 2$; dacă $0 < k < 1/2$, atunci $0 \leqslant f(k) \leqslant {}^1/_2$ iar $f(f(k)) = k$, adică funcţia f pe segmentul $0 \leqslant k \leqslant {}^1/_2$ coincide cu funcţia sa inversă şi graficul ei este simetric faţă de prima bisectoare



Eig. 68. În toate căsuţele necompletate este zero

să se obţină contradicţia: este clar că orice dreptunghi $Na_1 \times Nb_1$ unde a_1, b_1 şi N sînt numere întregi poate fi descompus în a_1b_1 pătrate (de latură N) şi de aceea suma tuturor numerelor situate în el nu poate depăşi în modul a_1b_1.

Figura 67 clarifică a doua jumătate a demonstraţiei. În figura 68 este dat un exemplu în care suma numerelor dintr-un anumit dreptunghi este egală cu trei. Astfel pentru $c = 2$ afirmaţia problemei nu este adevărată. Cel mai probabil e faptul că valoarea exactă este $c = 4$ dar exemple care să arate că $c > 3$, nu cunoaştem.

N.B. Vasiliev

M 38. *Cercul construit pe înălţimea AD a triunghiului dreptunghic ABC, ca diametru, intersectează cateta AB în punctul K şi cateta AC în punctul M. Segmentul KM intersectează înălţimea AD în punctul L. Se ştie că segmentele AK, AL şi AM formează o progresie geometrică (adică $AK / AL = AL / AM$). Să se găsească unghiurile ascuţite ale triunghiului ABC.*

L.M. Lopovok

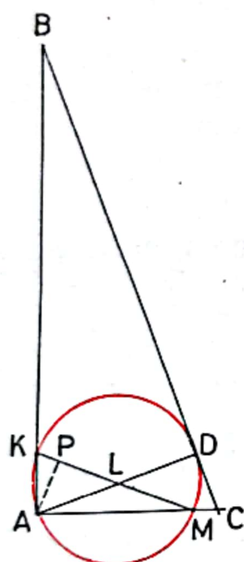


Fig. 69

E uşor să se demonstreze că $AKDM$ este dreptunghi şi L este centrul său (vezi figura 69). Ducem perpendiculara AP pe KM.

Atunci

$$AL^2 = AK \cdot AM = KM \cdot AP = 2AL \cdot AP,$$
$$AL = 2AP, \ \sphericalangle PLA = 30°$$

şi întrucît $AL = KL = ML$ rezultă că unghiurile ascuţite ale triunghiului AKM sînt egale cu 15° şi 75°. Aceleaşi unghiuri ascuţite le are şi triunghiul ABC:

$$\sphericalangle C = \sphericalangle BAD = \sphericalangle AKM.$$

L. M. Lopovok

M 39. *Să se demonstreze că numerele întregi nenegative x, y satisfac ecuaţia $x^2 - mxy + y^2 = 1$ (unde m este un număr întreg dat, mai mare decît 1) atunci şi numai atunci cînd x şi y sînt termeni vecini ai şirului $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = m$, $\varphi_3 = m^2 - 1$, $\varphi_4 = m^3 - 2m$, $\varphi_5 = m^4 - 3m^2 + 1$, ... în care $\varphi_{k+1} = m\varphi_k - \varphi_{k-1}$ pentru toţi $k \geqslant 1$.*

De exemplu, toate soluţiile ecuaţiei

$$x^2 - 3xy + y^2 = 1 \quad (1)$$

în numere întregi (x, y), $0 \leqslant x < y$ sînt perechile

$$(0, 1), (1, 3), (3, 8), (8, 21), \ldots \quad (2)$$

formate din termenii consecutivi ai şirului 0, 1, 3, 8, 21, ... determinat de condiţiile $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_{k+1} = 3\varphi_k - \varphi_{k-1}$ pentru toţi $k \geqslant 1$.

Vom rezolva această problemă pentru $m = 3$ (pentru ceilalți $m > 1$ rezolvarea este analoagă). Trebuie să demonstrăm în primul rînd că perechile de numere (2) satisfac ecuația (1) și al doilea rînd că nu există alte perechi formate din numere nenegative care să satisfacă această ecuație.

În șirul (2), după fiecare pereche (x, y) urmează o pereche (x_1, y_1) care poate fi obținută din (x, y) cu ajutorul transformării

$$x_1 = y, \qquad y_1 = 3y - x. \tag{3}$$

Notăm această transformare $(x, y) \to (y, 3y - x)$ prin litera T. E ușor de verificat că dacă perechea (x, y) satisface ecuația (1), atunci și perechea $(x_1, y_1) = T(x, y)$ o satisface de asemenea:

$$x_1^2 - 3x_1y_1 + y_1^2 = y^2 - 3y(3y - x) + (3y - x)^2 = y^2 - 3xy + x^2. \tag{4}$$

De aici rezultă că toate perechile (2) satisfac ecuația (1), căci perechea (0, 1) o satisface și toate celelalte se obțin din ea cu ajutorul unui număr finit de transformări T.

Să arătăm acum că alte soluții (x, y) în numere întregi supuse la condiția $0 \leqslant x < y$, ecuația (1) nu admite. Fie (x_1, y_1) o astfel de soluție. Vom găsi, perechea (x, y) din care au fost obținuți acești x_1 și y_1 după formulele (3), pentru aceasta e suficient să se exprime x și y prin x_1 și y_1:

$$x = 3x_1 - y_1, \qquad y = y_1. \tag{5}$$

Această trecere de la (x_1, y_1) la (x, y) este transformarea *inversă* a lui T și o vom nota T^{-1}. Din egalitatea (4) rezultă că dacă perechea (x_1, y_1) satisface ecuația (1) atunci și perechea $(x, y) = T^{-1}(x_1, y_1)$ o satisface. Să arătăm că dacă $0 < x_1 < y_1$ atunci și

$$0 \leqslant x < y. \tag{6}$$

Scriem egalitatea $x_1^2 - 3x_1y_1 + y_1^2 = 1$ în următoarele două feluri:

$$x_1^2 + y_1(y_1 - 3x_1) = 1, \tag{7}$$

$$x_1(x_1 - y_1) + y_1(y_1 - 2x_1) = 1. \tag{8}$$

Din egalitatea (7) rezultă imediat (x_1 și y_1 sînt pozitivi!) că $-x = y_1 - 3x_1 \leqslant 0$, iar dacă $y_1 - 3x_1 = 0$ atunci $x_1 = 1$ și $y_1 = 3$. Din egalitatea (8) rezultă că $y = x = y_1 - 2x_1 > 0$ (căci $x_1 - y_1$ e negativ). Inegalitatea (6) este demonstrată. Observăm că ea poate fi scrisă astfel

$$0 \leqslant x < x_1 \tag{9}$$

întrucît $x_1 = y$. Astfel, orice soluție (x_1, y_1), $0 < x_1 < y_1$, poate trece prin transformarea T^{-1} în soluția (x, y) pentru care $0 \leqslant x < y$. Dacă $x > 0$, mai putem aplica T^{-1} încă o dată sau de mai multe ori, obținînd noi soluții (mai mici). Într-adevăr, așa cum arată (9) mărimea numărului întreg x prin fiecare transformare se micșorează. De aceea după un anumit număr finit de pași trebuie să ne oprim și ne oprim numai atunci cînd obținem soluția (x, y), în care $x = 0$ și deci $y = 1$. Astfel am demonstrat că din fiecare soluție (x_1, y_1) după un număr finit de transformări T^{-1} se obține soluția (0, 1). De aici rezultă că orice soluție se obține din soluția (0,1) după un număr finit de transformări T (adică alte soluții diferite de (2) nu există). Problema este complet rezolvată.

Această rezolvare poate fi făcută mai intuitivă astfel. Vom reprezenta perechea de numere (x, y), în mod obişnuit, ca un punct din plan. Atunci ecuaţia $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ reprezintă în plan o curbă numită hiperbolă (vezi figura 70). A rezolva această ecuaţie în numere întregi înseamnă a găsi toate punctele de coordonate întregi situate pe hiperbolă. Un astfel de punct se indică uşor, este cel de coordonate (0, 1). Toate celelalte (din unghiul $0 \leqslant x < y$, aşa cum am arătat se obţin din acesta prin aplicarea succesivă a transformării $T : (x, y) \to (y, 3y - x)$. Această transformare T, a planului are următoarele proprietăţi:

1) Transformă orice dreaptă din plan tot într-o dreaptă (astfel de transformări se numesc *liniare*).

2) Transformă orice punct de coordonate întregi tot într-un punct de coordonate întregi.

3) Transformă orice hiperbolă de ecuaţie $x^2 - 3xy + y^2 = c \neq 0$ în ea însăşi (şi fiecare dintre cele patru semidrepte cu vîrfurile în (0, 0) după care sînt distribuite punctele mulţimii care satisface ecuaţia $x^2 - 3xy + y^2 = 0$); fiecare punct sub acţiunea transformării T trece într-o nouă poziţie pe aceeaşi hiperbolă (sau semidreaptă) pe care era; punctul (0, 0) rămîne neschimbat. O astfel de transformare se numeşte *rotaţie hiperbolică* cu centrul în punctul (0, 0) prin analogie cu obişnuita rotaţie „circulară".

De aceleaşi proprietăţi se bucură şi transformarea inversă T^{-1}. Mai amintim încă o proprietate interesantă a acestor transformări.

4) Aria oricărei figuri nu se schimbă prin aceste transformări. (patrulaterele din figura 70 din semiplanul superior se transformă unul în celălalt prin transformările T şi T^{-1}). La fel stau lucrurile şi pentru $m > 3$. Pentru $m = 2$ raţionamentele se fac la fel, dar interpretarea geometrică întrucîtva se schimbă. În locul proprietăţii 3) transformarea respectivă $T : (x, y) \to (y, 2y - x)$ se bucură de proprietate 3'): ea transformă fiecare dreaptă $y - x = c$ în ea însăşi; fiecare punct se deplasează pe dreapta sa (pentru $c \neq 0$) şi toate punctele situate pe dreapta $y - x = 0$ rămîn nemişcate (o astfel de transformare se numeşte *deplasare*). Verificaţi aceasta şi desenaţi respectiva figură singuri.

E interesant că şi pentru $m = 1$, adică pentru ecuaţia $x^2 - xy + y^2 = 1$ (ea este ecuaţia unei elipse), se poate scrie transformarea respectivă $T : (x, y) \to (y, y - x)$ care transformă această ecuaţie – şi în general fiecare elipsă de ecuaţie $x^2 - xy + y^2 = c$ în ea însăşi). Această transformare se numeşte *rotaţie eliptică*. Ea, ca şi pentru $m > 1$, transformă toate soluţiile întregi ale ecuaţiei unele în altele dar soluţiile sînt în

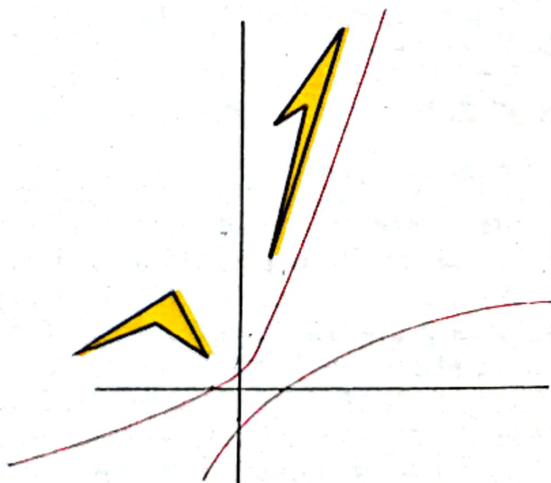


Fig. 70

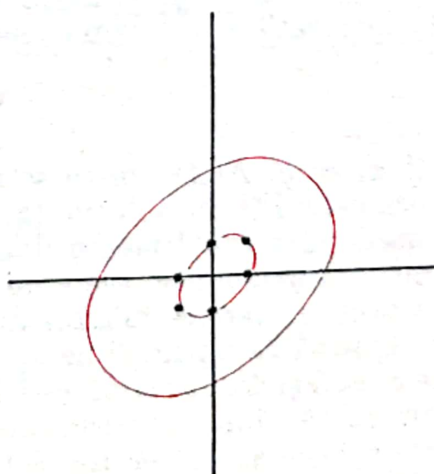


Fig 71

număr finit (nu e de mirare; spre deosebire de hiperbolă și drepte, elipsa este o figură mărginită) și anume șase, iar în locul schemei

$$(0,\ 1) \xrightarrow{T} (1,\ 3) \xrightarrow{T} (3,\ 8) \xrightarrow{T} (8,\ 21) \rightarrow \ldots$$

care se putea scrie pentru ecuația (1), aici se obține următoarea:

$$\begin{array}{ccccccc} & (-1,\ 0) & \xrightarrow{T} & (0,\ 1) & \xrightarrow{T} & (1,\ 1) & \\ T\uparrow & & & & & & \downarrow T \\ & (-1,\ -1) & \xleftarrow[T]{} & (0,\ -1) & \xleftarrow[T]{} & (1,\ 0) & \end{array}$$

L.G. Limanov

M 40. *Să se găsească suma*

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \ldots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1.$$

Încercați să rezolvați următoarea problemă mai generală: să se găsească suma:

$S_{n,k} = [1.2 \ldots k] \cdot [n(n+1) \ldots (n-k+1)] + [2.3 \ldots (k+1)] \cdot [(n-1)(n-2) \ldots (n-k)] + [3 \cdot 4 \ldots (k+2)] \cdot [(n-2)(n-1) \ \ldots \ (n-k-1)] + \ldots [(n-k)(n-k+1) \ldots (n-1)] \times [(k+1)k \ldots 2] + [(n-k+1)(n-k+2) \ldots n] \cdot [k(k-1) \ldots 1]$

V.N. Berezin

Problema constă din două cerințe dintre care prima, mult mai ușoară decît a doua, admite cîteva rezolvări diferite. Dăm una dintre ele destul de interesantă și instructivă urmărind raționamentele lui I. Alekseev și A. Aliaev.

Mai înainte verificăm că

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \qquad (1)$$

Într-adevăr

$$1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$$

$$2 \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$$

$$3 \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

De unde și rezultă prin adunare relația (1).
Scriem acum suma dată sub forma unui tablou triunghiular

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1\ 2 \\ 1\ 2\ 3 \\ 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \ldots n-1 \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \ldots n-1\ n \end{array}$$

Putem găsi valoarea acestei sume nu numai adunînd pe coloană şi apoi însumînd coloanele, ci din contră se pot efectua întîi sumele pe linii. Întrucît

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

ajungem la suma scrisă în partea stîngă a egalităţii (1). Deci obţinem

$$n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + \dots + 1 \cdot n = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Suma cealaltă din problemă, mai generală, poate fi găsită cu ajutorul unor consideraţii de analiză combinatorie.

Este evidentă egalitatea:

$$[1 \cdot 2 \dots k] \cdot [n(n-1) \dots (n-k+1)] + [2 \cdot 3 \dots (k+1)] \cdot [(n-1)(n-2) \dots (n-k)] + \dots + [(n-k+1)(n-k+2) \dots n] \cdot [k(k-1) \dots 1] =$$
$$= (k!)^2 (C_k^k \cdot C_n^k + C_{k+1}^k \cdot C_{n-1}^k + C_{k+2}^k \cdot C_{n-2}^k + \dots + C_n^k \cdot C_k^k)$$

Fiecare termen de forma $C_{k+m}^k \cdot C_{n-m}^k$ (unde $m = 0, 1, 2, \dots, n-k$) reprezintă numărul combinărilor de $n + k$ elemente luate cîte $2k$ dar nu toate posibile ci cele în care la început se aleg k elemente din $k + m$ elemente



Fig.72

Fig. 72. Dintre cele $m + k + 1$ elemente alegem la început unul (astfel încît la stînga sa şi la dreapta sa să fie cel puţin cîte k elemente) ducem prin el o linie şi apoi la stînga şi la dreapta liniei luăm cîte k elemente. Pe figură $m = 9$, $k = 3$, $m + k + 1 = 13$

determinate şi apoi încă k elemente din restul de $n - m$. Intuitiv cele spuse se explică astfel. Aşezăm „în linie" cele $n + k$ elemente date şi ducem o linie verticală care să separe $k + m$ elemente la stînga de $n - m$ elemente la dreapta. Alegem într-un anumit mod k elemente la stînga liniei şi k elemente la dreapta şi apoi reunim fiecare dintre aceste grupe „din stînga" cu fiecare din aceste grupe „din dreapta". În total vor fi un număr de $C_{k+m}^k \cdot C_{n-m}^k$ astfel de combinaţii.

Acum nu e greu de demonstrat că:

$$C_k^k \cdot C_n^k + C_{k+1}^k \cdot C_{n-1}^k + C_{k-2}^k \cdot C_{n-2}^k + \dots + C_n^k \cdot C_k^k = C_{n+k+1}^{2k+1}. \qquad (2)$$

Pentru aceasta este suficient să se stabilească o corespondenţă biunivocă între combinările de $n + k + 1$ elemente luate cîte $2k + 1$ şi combinările de $n + k$ elemente de tipul următor: „k elemente luate din stînga liniei; linia; k elemente luate din dreapta liniei" al căror număr total este egal cu suma din partea stîngă a egalităţii (2). Astfel, suma căutată este egală cu

$$(k!)^2 \cdot C_{n+k+1}^{2k+1} = \frac{(n+k+1)!(k!)^2}{(2k+1)!(n-k)!}.$$

În particular pentru prima cerinţă a problemei $k = 1$ şi de aceea suma este $C_{n+2}^3 = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$.

V.N. Berezin

M 41. *Se dă un cerc, diametrul său AB şi un punct C pe acest diametru. Să se construiască pe cerc două puncte X şi Y simetrice faţă de diametrul AB astfel încît dreapta YC să fie perpendiculară pe dreapta XA**.

Fie K punctul de intersecţie a segmentelor XY şi AB; după condiţie $XY \perp AB$ şi $XK = KY$. Pentru orice punct X de pe cerc $\sphericalangle AXB = 90°$. De aceea cerinţa $YC \perp AX$ este echivalentă cu oricare dintre următoarele condiţii:

$$YC \parallel BX, \quad \sphericalangle YCB = \sphericalangle CBX,$$

$$\triangle CYX = \triangle KBX, \quad CK = KB \text{ (fig. 73)}.$$

Astfel, ridicînd din mijlocul segmentului CB o perpendiculară pe dreapta AB la intersecţia acesteia cu cercul obţinem cele două puncte căutate (oricare dintre ele poate fi luat ca X respectiv Y).

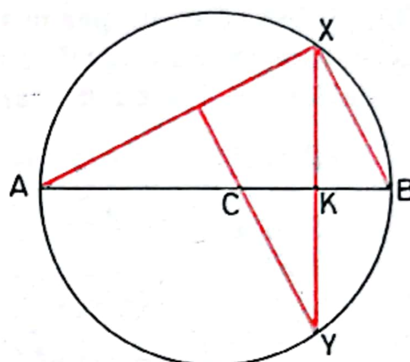


Fig. 73

M 42. *Cifrele unui număr cu şaptesprezece cifre se scriu în ordine inversă. Numărul obţinut se adună cu primul. Să se demonstreze că cel puţin una dintre cifrele acestei sume este pară.*

Vom demonstra prin inducţie după n că această afirmaţie este adevărată pentru orice număr cu $4n + 1$ cifre. Pentru $n = 0$ este evident. Să presupunem că pentru un anumit n ea nu este adevărată, adică există un astfel de număr $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_{4n-1} a_{4n} a_{4n+1}}$ încît în suma

$$\begin{array}{l} \overline{a_1 \; a_2 \; a_3 \; \ldots \; a_{4n-1} a_{4n} a_{4n+1}} + \\ \overline{a_{4n+1} a_{4n} a_{4n-1} \; \ldots \; a_3 \; a_2 \; a_1} \end{array}$$

toate cifrele sînt impare. Atunci suma cifrelor $a_1 + a_{4n+1}$ este impară şi în locurile marcate de săgeţi nu se va întîmpla trecerea unei unităţi la rangul următor. De aceea în suma următoarelor numere cu $4n - 3$ cifre

$$\begin{array}{l} \overline{a_3 \ldots a_{4n-1}} + \\ \overline{a_{4n-1} \ldots a_3} \end{array}$$

de asemenea toate cifrele vor fi impare, prin urmare afirmaţia va fi neadevărată şi pentru $n - 1$. Demonstraţia este terminată (gîndiţi-vă de ce obişnuitul „pas de inducţie" — „dacă e adevărată pentru n atunci este adevărată şi pentru $n + 1$" poate fi înlocuit cu un pas în sens contrar" „dacă nu e adevărată pentru n atunci nu e adevărată nici pentru $n - 1$" !).

Remarcăm că afirmaţia dată nu se poate întări: pentru numerele cu un număr par de cifre sau cu $4n + 3$ cifre, afirmaţia problemei poate să nu se adeverească:

$11112222 + 22221111 = 33333333$, $72727262626 + 62626272727 = 135353535353$.

* Problemele 41–55 au fost date la Olimpiada unională din 1970.

M 43. *Fiecare latură a unui triunghi echilateral este împărţită în n părţi egale. Prin punctele de diviziune sînt duse drepte paralele cu laturile. Ca rezultat triunghiul se împarte în n^2 triunghiuri mici. Numim „lanţ" un şir de triunghiuri în care nici unul nu apare de două ori şi în care succesorul are o latură comună cu precedentul. Care este numărul maxim posibil de triunghiuri în lanţ?*

Răspuns: $n^2 - n + 1$. Pentru demonstraţie, aşa cum se întîmplă la olimpiade se face un pas neaşteptat: se colorează triunghiul ca la tabla de şah, aşa cum se vede în figură. Restul este simplu. În tot triunghiul mare triunghiurile colorate sînt cu n mai multe decît celelalte (pe fiecare orizontală cele colorate sînt cu unul mai multe), iar în lanţ ele trebuie să alterneze, deci cele colorate vor fi cu unul mai multe decît celelalte.

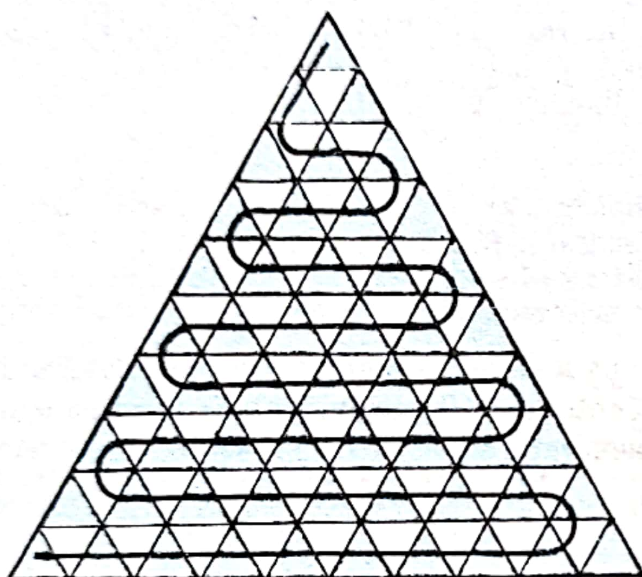


Fig. 74

Unul dintre lanţurile de lungime maximă este indicat în figura 74 (din cele spuse mai sus este clar că pentru ca lanţul să aibă $n^2 - n + 1$ triunghiuri e necesar şi suficient ca el să înceapă şi să se termine într-un triunghi colorat şi să conţină pe toate cele necolorate).

M 44. *Să se demonstreze că pentru orice număr natural K există o infinitate de numere naturale T care nu au în scrierea lor zecimală zerouri şi astfel încît T şi KT au aceeaşi sumă a cifrelor.*

Presupunem că numărul K are (în scrierea zecimală) k cifre. Atunci în rolul lui T poate fi luat orice număr 999 .... 99 scris cu n de nouă, unde $n \geqslant k$; atunci şi suma cifrelor lui T şi suma cifrelor lui KT sînt egale cu $9n$ (în numărul $KT = K(10^n - 1)$ cifrele distanţate între ele cu n ranguri dau însumate 9; de exemplu,

$743552 \cdot 99999999 = 743552 \cdot (10^8 - 1) = 74355200000000 - 743552 =$ $= 74355199256448$ demonstraţia aproape evidentă pentru cazul general o lăsăm cititorului).

M 45. *Să se demonstreze că din orice 200 de numere întregi se pot alege 100 astfel încît suma lor să se dividă prin 100.*

Încercaţi să generalizaţi această problemă: demonstraţi că din oricare $2n - 1$ numere întregi se pot alege n astfel încît suma lor să se dividă prin n, unde $n \geqslant 2$.

Lemă. Dacă afirmaţia problemei este adevărată pentru $n = a$ şi $n = b$, atunci este adevărată şi pentru $n = ab$.

Să observăm că proprietatea „suma a n numere întregi $x_1, \ldots, x_n$ se divide prin n“ se poate formula şi aşa: media aritmetică $\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ este număr întreg.

Astfel, fie date $2ab - 1$ numere întregi. Întrucît $n = b$ şi $2ab - 1 > 2b - 1$, din cele $2ab - 1$ numere se pot alege b, astfel încît suma acestora se divide prin b. Apoi din cele rămase (dacă nu sînt mai puţine decît $2b - 1$) alegem încă b numere care se bucură de această proprietate ş.a.m.d.

Întrucît

$$2ab - 1 = (2a - 1)b + (b - 1),$$

atunci această operaţie se poate repeta de $2a - 1$ ori şi să se obţină $2a - 1$ alegeri de cîte b numere, astfel încît media aritmetică a celor b numere este întreagă. Întrucît afirmaţia este adevărată pentru $n = a$ din aceste $2a - 1$ medii aritmetice se pot alege a, astfel încît suma acestora să se dividă prin a. E clar că atunci că cele ab numere formate din cele a alegeri de către b numere au proprietatea cerută: suma lor se divide prin ab. Lema e demonstrată (această lemă ca şi problema sînt făcute de Iu. I. Ionin).

Astfel, pentru a demonstra afirmaţia problemei pentru produsul $n = a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$ e suficient să se demonstreze pentru factorii săi $n = a_1$, $n = a_2, \ldots, n = a_k$ (şi să se aplice de cîteva ori lema). De aceea e suficient să se demonstreze afirmaţia pentru factorii primi ai numărului n. De exemplu, pentru a rezolva problema cînd $n = 100$, e suficient să se demonstreze două afirmaţii: „din orice 3 numere întregi se pot alege 2 a căror sumă se divide prin 2“ şi „din orice 9 numere întregi se pot alege 5 a căror sumă se divide prin 5“. Prima este evidentă iar a doua se poate demonstra printr-un raţionament scurt. Iată demonstraţia pentru orice n prim.

Teoremă. Din orice $2p - 1$ numere întregi se pot alege p, astfel încît suma lor să se divide prin p (p un număr prim arbitrar).

Dăm demonstraţia propusă de S. Voronin (Moscova).

E clar că în demonstraţie vom considera toate numerele „după modulul p“ adică ne interesează numai ce rest $0, 1, 2, \ldots, p - 1$ dă cutare sau cutare număr la împărţirea prin p. E comod să reprezentăm aceste resturi (mai ales dacă va fi vorba de „adunare după modul p“ pe un cerc (vezi figura 75).

Lemă. Fie date r numere întregi $b_1, b_2, \ldots, b_r$; $0 < b_i < p$ pentru toţi $i = 1, 2, \ldots, r$ şi $0 < r < p$ (p prim). Atunci din aceste numere se pot face $r + 1$ sume care dau resturi diferite la împărţirea prin p (vom lua suma formată dintr-o „mulţime vidă de termeni“ pe care o considerăm egală cu zero, sume dintr-un singur termen, din doi ... din r termeni).

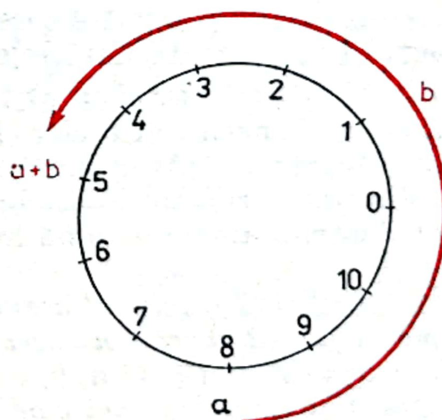


Fig. 75. Pentru ca să se găsească suma $a + b$ după modulul p, trebuie să se numere de la a în sens invers acelor ceasului b unităţi (pe desenul care corespunde la $p = 11$ e reprezentată suma $8 + 8$ care după modulul 11 dă 5)

D e m o n s t r a ţ i e. Pentru $r = 1$ este evident: sumele dau ca resturi 0 şi b_1. Să presupunem că este adevărat pentru $r = k < p - 1$ şi neadevărată pentru $r = k + 1$ şi vom ajunge la o contradicţie. Presupunem că sumele formate din k termeni $b_1, b_2, \ldots, b_k$ dau $k + 1$ resturi diferite $0, s_1, \ldots, s_k$. Atunci, întrucît după adăugarea lui $b = b_{k+1}$, numărul sumelor diferite nu trebuie să se mărească, toate sumele

$$0 + b,\ s_1 + b,\ \ldots,\ s_k + b$$

(după modulul p) vor fi cuprinse în mulţimea

$$\{0,\ s_1,\ \ldots,\ s_k\},$$

Cu alte cuvinte, dacă la orice element al acestei mulţimi se adaugă b, atunci se obţine din nou un element din aceeaşi mulţime. Astfel această mulţime conţine elementele $0, b, 2b, 3b, \ldots, (p-1)b$.
Dar este clar că toate aceste elemente sînt diferite (după modul): diferenţa $ib - jb = (i-j)b$, unde $0 < i - j < p$ şi $0 < b < p$ nu poate să se dividă prin p întrucît p este prim. Astfel am demonstrat că mulţimea $\{0, s_1, \ldots s_k\}$ conţine p elemente diferite deşi am presupus că $k + 1 < p$. Lema e demonstrată.

D e m o n s t r a ţ i a t e o r e m e i. Fie

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_p \leqslant a_{p+1} \leqslant \ldots \leqslant a_{2p-1}$$

resturile împărţirii celor $2p-1$ numere la p. Să considerăm încă următoarele p numere:

$$a_{p+1} - a_2,\ a_{p+2} - a_3,\ \ldots,\ a_{2p-1} - a_p. \qquad (*)$$

Dacă unul oarecare dintre ele este egal cu zero, de exemplu

$$a_{p+j} - a_{j+1} = 0, \text{ atunci } a_{j+1} = a_{j+2} = \ldots = a_{j+p}$$

iar suma celor p numere corespunzătoare se divide la p. Rămîne să examinăm cazul în care toate numerele (*) sînt nenule.

Vom găsi restul x al împărţirii sumei $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$ la p. Dacă $x = 0$, atunci totul e clar. Dacă $x \neq 0$ atunci, folosind lema, putem forma din diferenţele (*) o sumă care să dea restul $p - x$ prin împărţirea cu p. Adăugînd respectivele diferenţe la $a_1 + a_2 + \ldots + a_p$ şi efectuînd reducerile evidente, obţinem o sumă formată din p termeni care se divide prin p.

Utilizînd rezultatul acestei probleme, e uşor să se stabilească faptul că afirmaţia „Din oricare a numere întregi se pot alege b numere a căror sumă să se dividă prin c“ (unde a, b, c sînt nişte numere naturale concrete) este adevărată atunci şi numai atunci cînd b se divide la c şi $a \geqslant b + c - 1$.

N.B. Vasiliev

M 46. *Cîte laturi ale unui poligon convex pot să fie egale cu cea mai mare dintre diagonale?*

G. Galperin

R ă s p u n s: două, una sau nici una.

Exemple pentru fiecare dintre aceste cazuri pot fi construite uşor. Poligoane care să aibă trei sau mai multe laturi egale cu cea mai mare dintre diagonale nu pot să fie, întrucît două laturi egale cu cea mai mare dintre diagonale, trebuie să aibă neapărat un vîrf comun (vezi figura 76), iar trei laturi fiecare două dintre ele avînd un vîrf comun pot fi numai la triunghi dar acesta nu are diagonale.

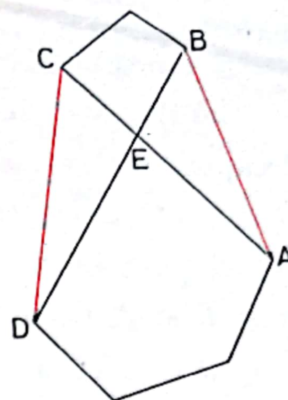


Fig. 76. Cazul $AB = CD > \max\{AC, BD\}$ nu e posibil pentru că $AB + CD < AE + EB + CE + ED = AC + BD$.

M 47. *Din cifrele 1 şi 2 să se formeze cinci numere de cîte n cifre, astfel încît la oricare două numere să le coincidă cifrele în exact m ranguri dar în nici un rang să nu coincidă cifrele tuturor celor cinci numere. Să se demonstreze că* $\frac{2}{5} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{3}{5}$.

Vom scrie numerele unele sub altele. În fiecare rang („coloană") sînt 5 cifre. Din ele se pot face 10 perechi (neordonate). În toate cele n coloane vor fi 10 n astfel de perechi. Să evaluăm cîte perechi dintre acestea vor fi formate din cifre identice, adică perechile (1, 1) şi (2, 2). În fiecare coloană astfel de perechi sînt sau 4 sau 6 . De aceea, numărul total de astfel de perechi nu e mai mic decît $4n$ şi nu e mai mare decît $6n$. Pe de altă parte numărul acestor perechi este $10m$, pentru că prin comparaţia oricăror două numere după toate cele n ranguri, din ipoteză se obţin exact m astfel de perechi, iar numărul tuturor perechilor posibile la 5 numere este 10.

Astfel $4n \leqslant 10m \leqslant 6n$ ceea ce şi trebuia demonstrat (vezi fig. 77).

M 48. *Într-un triunghi ascuţitunghic ABC, bisectoarea AD, mediana BM şi înălţimea CH se intersectează într-un punct. Să se demonstreze că unghiul BAC este mai mare de 45°.*

Nu e greu de demonstrat că pentru un unghi dat $\sphericalangle BAC = \alpha < \frac{\pi}{2}$ există numai un triunghi (abstracţie făcînd de o asemănare) ABC în care înălţimea CH bisectoarea AD şi mediana BM să se intersecteze într-un punct. Într-adevăr, luînd pe o latură a unghiului $\sphericalangle A = \alpha$ (arbitrar) segmentul AC, ducînd pe cealaltă latură a unghiului perpendiculara CH şi notînd punctul ei de intersecţie cu bisectoarea unghiului A prin O, vom găsi punctul B de intersecţie a celei de a doua laturi a unghiului cu dreapta OM (unde M este mijlocul segmentului AC) şi astfel construim triunghiul cerut ABC, evident că dacă sînt date unghiul $\sphericalangle A$ şi AC triunghiul este determinat în mod unic. Remarcăm că

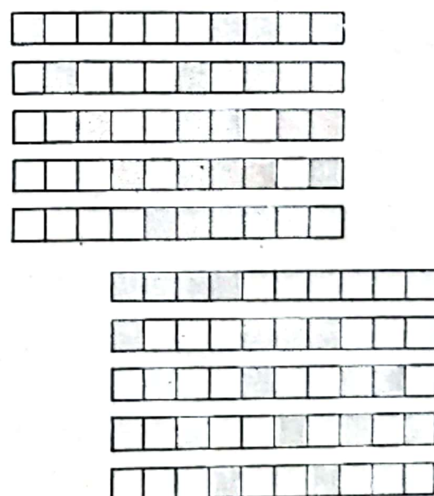


Fig. 77. Aici sînt prezentate cazuri în care în inegalităţile din ipoteza problemei avem egalitatea. Cifra 1 corespunde pătratelor necolorate, cifra 2 celorlalte.

astfel unghiul B este ascuţit (întrucît punctul H, piciorul înălţimii, este situat pe latura AB).

Să demonstrăm că dacă $\sphericalangle A < \frac{\pi}{4}$, atunci $\sphericalangle ACB > \frac{\pi}{2}$. Vom lua pe dreapta AB segmentul $HB_1 = AH$. Atunci bisectoarea B_1F a unghiului B_1 a triunghiului isoscel AB_1C va trece prin punctul O. Întrucît $\frac{AF}{FC} = \frac{AB_1}{B_1C} > 1$, atunci punctul M va fi situat între A şi F, de aceea B_1 va fi situat între A şi B şi $\sphericalangle BCA > \sphericalangle B_1CA > \frac{\pi}{2}$.

În această problemă se poate obţine şi un rezultat mai exact: să se găsească cea mai mică valoare a unghiului α cu condiţia ca $\sphericalangle ACB = \gamma < \frac{\pi}{2}$. Pentru aceasta vom exprima pe γ ca funcţie de α. Ducem $HE \parallel BM$ (E un punct pe AC). Atunci (vezi figura 78):

$$\frac{EM}{MC} = \frac{HO}{OC} = \frac{AH}{AC} = \cos\alpha, \quad \frac{HB}{AH} = \frac{EM}{AE} = \frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha},$$

$$\frac{HB}{HC} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}.$$

$$\gamma = \gamma(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \operatorname{arctg}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}.$$

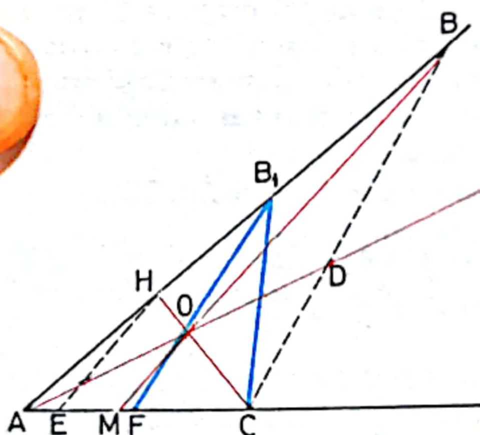


Fig. 78

De aici este evident că funcţia $\gamma = \gamma(\alpha)$ pe segmentul $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ este monoton descrescătoare (cu cît creşte α cu atît descreşte $\cos\alpha$ şi creşte $\sin\alpha$, deci se micşorează fracţia de sub arctg). Vom găsi acum α pentru care $\gamma(\alpha) = \frac{\pi}{2}$. Această ecuaţie se reduce la: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\sin^2\alpha\,(1-\cos\alpha) = \cos^3\alpha$, de unde $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Astfel dacă $\gamma < \frac{\pi}{2}$ atunci $\alpha > \alpha_0 = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\left(\alpha_0 > \frac{\pi}{4}\right.$, întrucît $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$; cum ne putem convinge din tabele, valoarea unghiului α_0 în grade este aproximativ $\left.51°50'\right)$.

M 49. *Pe nişte cartoane se scriu numerele de la 11111 la 99999 inclusiv. Apoi aceste cartoane se aranjează unul după altul într-o ordine oarecare. Să se arate că numărul cu 444445 cifre obţinut nu poate fi putere a lui 2.*

Este uşor demonstrat că acest număr se împarte la 11111, folosind faptul că numerele 10^5A şi A, pentru orice întreg A dau aceleaşi resturi la împărţirea cu 11111, iar suma $11111 + 11112 + \ldots + 99998 + 99999$ se împarte la 11111. Dar dacă acest număr se împarte la 11111 el nu poate fi putere a lui 2 (din unicitatea descompunerii în factori primi).

N.B. Vasiliev

M 50. *Vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi se colorează în culori diferite, astfel încît punctele cu aceeași culoare sînt vîrfurile unor poligoane regulate. Să se demonstreze că printre aceste poligoane se găsesc două egale.*

N. Vasiliev

Să presupunem că vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi au fost colorate astfel încît vîrfurile de aceeași culoare formează poligoane regulate diferite: cu m_1 laturi, cu m_2 laturi, cu m_3 laturi, ..., unde $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$. Cel mai mic dintre aceste numere m_1 va juca un rol deosebit în raționamentele noastre și îl vom nota simplu prin m.

Ducem din centrul O al poligonului cu n laturi, vectori în toate vîrfurile sale; îi notăm în ordine: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ (vezi figura 79, a). Atunci

$$\measuredangle \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = \measuredangle \mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 = \dots = < \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_n = \measuredangle \mathbf{a}_n\mathbf{a}_1 = \frac{2\pi}{n}.$$

Aici și mai departe, prin $\measuredangle \mathbf{ab}$ înțelegem mărimea unghiului (cel mai mic, pozitiv) cu care trebuie să se rotească în sens contrar acelor ceasului vectorul $\mathbf{a}$ pentru ca el să coincidă cu $\mathbf{b}$; totdeauna $0 \leqslant \measuredangle \mathbf{ab} < 2\pi$.

Vom spune că vectorii $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \dots, \mathbf{c}_q$ din plan, duși din punctul O formează un s i s t e m r e g u l a t dacă au lungimi egale și formează între ei unghiuri egale

$$\measuredangle \mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 = \measuredangle \mathbf{c}_2\mathbf{c}_3 = \dots = \measuredangle \mathbf{c}_{q-1}\mathbf{c}_q = \measuredangle \mathbf{c}_q\mathbf{c}_1 = \alpha > 0.$$

Ne e necesar următorul fapt aproape evident (demonstrația sa este dată la sfîrșitul rezolvării.)

L e m a. Suma vectorilor care formează un sistem regulat este egală cu zero.

Înainte de a folosi lema, să facem cu vectorii noștri următoarea transformare. Să considerăm că vectorul $\mathbf{a}_1$ ajunge în unul dintre vîrfurile poligonului cu m laturi. Îl vom nota simplu $\mathbf{a}$ și vom socoti toate unghiurile de la el (în sens pozitiv). Vom nota prin $\mathbf{b}_i$ vectorul care se obține din $\mathbf{a}$ prin rotația de unghi $m \measuredangle aa_i$ (pentru fiecare $i = 1, 2, 3, \dots, n$). Prin transformarea $\mathbf{a}_i \to \mathbf{b}_i$ pe care am definit-o* (pe figura 79, b este reprezentată o astfel de transformare pentru $m = 3$) unghiurile dintre vectori se măresc de m ori; mai exact: dacă $m \measuredangle \mathbf{a}_i\mathbf{a}_j < 2\pi$, atunci $\measuredangle \mathbf{b}_i\mathbf{b}_j = m \measuredangle \mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$. De aceea, sistemul regulat de vectori cu unghiul $\alpha < \frac{2\pi}{m}$ este transferat prin această transformare tot într-un sistem regulat. În particular suma tuturor vectorilor $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ este egală cu zero.

Să calculăm această sumă în două moduri: vom găsi la început suma tuturor vectorilor corespunzători vîrfurilor de aceeași culoare și apoi vom aduna aceste sume. Să considerăm la început toți vectorii $\mathbf{a}_i$ care ajung în vîrfurile poligonului cu m_k laturi, unde $m_k > m$. Acesta este un sistem regulat de vectori cu unghi $\frac{2\pi}{m_k} < \frac{2\pi}{m}$. După transformare din el se obține tot un sistem regulat de vectori și suma vectorilor obținuți este egală cu zero.

---

* Pentru aceia care cunosc numerele complexe, remarcăm că dacă punctul O este zero din planul complex iar extremitatea vectorului $\mathbf{a}$ este unitatea, atunci această transformare este ridicarea la puterea $m : z \to z^m$.

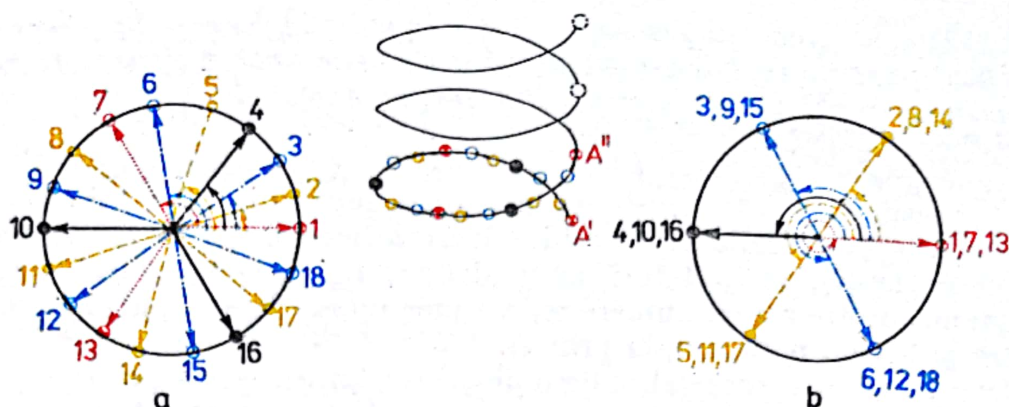


Fig. 79. Imaginaţi-vă că punctele colorate din figura 79-a sînt nişte mărgele înşirate pe o sîrmă îndoită în spirală. Noi privim această spirală de sus şi de aceea cele două mărgele însemnate la fel, din marginea desenului, A' şi A'' se proiectează pentru noi într-un singur punct A. Dacă acum fixăm una dintre mărgele A', iar pe A'' o deplasăm pe sîrmă încă două spire, ajungem la desenul 79-b, în care unghiurile dintre doi vectori vecini s-au mărit de 3 ori.

Să considerăm acum vectorii care ajung în vîrfurile poligonului cu m laturi. Unghiul dintre doi vectori vecini este egal cu $\frac{2\pi}{m}$, iar după transformare, toţi aceşti m vectori vor coincide cu vectorul $\mathbf{a}$, aşa că suma lor va fi egala cu $m\mathbf{a}$ (în figura 79 acest lucru se întîmplă cu vectorii desenaţi cu linie punctată şi linie plină).

Astfel s-a obţinut o contradicţie: pe de o parte suma tuturor vectorilor $\mathbf{b}_i$ este egală cu zero, pe de alta este $m\mathbf{a}$. De aceea presupunerea noastră nu e adevărată.

Demonstraţia lemei. Din punct de vedere fizic, această afirmaţie este evidentă din considerente de simetrie. Un mod de a transforma aceste consideraţii într-o demonstraţie riguroasă este următorul: Presupunem că $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \ldots + \mathbf{c}_n = \mathbf{s}$. Rotim toţi vectorii $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ în jurul punctului O cu unghiul α. Atunci desigur că şi suma lor se roteşte cu α. Dar după ipoteză, întregul sistem format din n vectori, după rotaţia cu unghiul α, coincide cu el însuşi (c_1 va ocupa locul lui $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_2$ al lui $\mathbf{c}_3 \ldots \mathbf{c}_n$ al lui $\mathbf{c}_1$). De aceea, vectorul $\mathbf{s}$, după rotaţia cu unghiul α, nu trebuie să se modifice. Aceasta se poate întîmpla, numai dacă $\mathbf{s} = 0$.

Se poate demonstra că un sistem regulat format din q vectori, în cazul general, constă din $q = dr$ vectori duşi din punctul O în vîrfurile unui poligon regulat cu r laturi, astfel încît în fiecare vîrf sînt duşi cîte d vectori egali (dacă includem aici şi „douălaterele“ adică perechile de vectori opuşi, corespunzătoare lui $m = 2$); α poate să ia orice valoare $2\pi k/r$, unde k şi r sînt prime între ele şi $0 < k < r$. Am lăsat această observaţie la sfîrşit întrucît în demonstraţie nu am explicat detaliat cum se construieşte un sistem regulat de vectori $\mathbf{b}_i$. Dar desigur că analizînd demonstraţia în profunzime, este util să clarificăm acest lucru.

Ideea rezolvării expuse aparţine lui A. Livşiţ (Leningrad). Analizînd atent această demonstraţie, se poate demonstra că orice descompunere a mulţimii vîrfurilor unui poligon regulat cu n laturi în cîteva submulţimi corespunzătoare vîrfurilor unor poligoane regulate (nu neapărat diferite) se poate face în felul următor: la început se desface poligonul cu n laturi în cîteva poligoane cu m laturi (pentru aceasta este necesar ca n să se dividă la m), apoi unul dintre poligoanele regulate obţinute se desface din nou în cîteva poligoane regulate egale (vezi figura 79) ş.a.m.d. de mai multe ori. Cititorul, care doreşte

să analizeze mai amănunţit acest lucru, este sfătuit să se gîndească la legătura problemei acesteia „unidimensională“ cu problema M8 „bidimensională“ şi mai înainte să stabilească echivalenţa problemei M50 cu următoarea: să se demonstreze că mulţimea tuturor numerelor întregi nu se poate descompune într-un număr finit de progresii aritmetice (infinite în ambele sensuri) de raţii două cîte două diferite.

M 51. *Să se demonstreze că dacă produsul a trei numere pozitive este egal cu unu şi suma acestor numere este strict mai mare decît suma inverselor lor, atunci unul şi numai unul dintre aceste numere este mai mare decît unu.*

Fie a, b, c numerele date. Atunci $abc = 1$ şi $(a-1)(b-1)(c-1) = abc - ab - bc - ac + a + b + c - 1 = a + b + c - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} > 0$ prin urmare, dintre cele trei numere $a-1$, $b-1$, $c-1$, două sînt negative şi unul pozitiv (toate trei nu pot fi pozitive, întrucît $abc = 1$).

M 52. *Se dau cinci segmente astfel încît cu oricare trei dintre ele se poate face un triunghi. Să se demonstreze că cel puţin unul dintre aceste triunghiuri este ascuţitunghic.*

M. Serov

Din segmentele $x \leqslant y \leqslant z$ se poate face un triunghi dacă $z < x + y$ şi acesta va fi ascuţitunghic dacă $z^2 < x^2 + y^2$. Să presupunem că există cinci segmente $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$ astfel încît din oricare trei se poate face un triunghi dar nu ascuţitunghic. Atunci

$$a_5^2 \geqslant a_4^2 + a_3^2,\ a_4^2 \geqslant a_3^2 + a_2^2,\ a_3^2 \geqslant a_2^2 + a_1^2,$$

şi de aceea

$$a_5^2 \geqslant 2a_3^2 + a_2^2 \geqslant 3a_2^2 + 2a_1^2 \geqslant a_2^2 + 2a_1a_2 + a_1^2 = (a_2 + a_1)^2$$

adică $a_5 \geqslant a_2 + a_1$ şi prin urmare din segmentele a_1, a_2, a_5 nu se poate construi un triunghi.

M 53. *În triunghiul ABC prin mijlocul M al laturii BC şi prin centrul O al cercului înscris se duce dreapta MO care intersectează înălţimea AH în punctul E. Să se demonstreze că segmentul AE este egal cu raza cercului înscris.*

Notăm lungimile laturilor opuse vîrfurilor A, B, C respectiv prin a, b, c. Se poate considera $b > c$ ($b \neq c$ fiindcă altfel dreptele MO şi AH nu s-ar intersecta ci ar coincide). Ducem perpendiculara $OP = r$ pe BC (fig. 80).

Atunci

$$MC = \frac{a}{2},\ PC = \frac{a+b-c}{2},\ HC = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a},$$

$$\frac{EH}{OP} = \frac{HM}{PM} = \frac{HC - MC}{PC - MC} = \frac{2HC - a}{b - c} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - a^2}{a(b-c)} = \frac{b+c}{a}$$

$$\frac{AE}{r} = \frac{AH}{r} - \frac{EH}{r} = \frac{a+b+c}{a} - \frac{b+c}{a} = 1$$

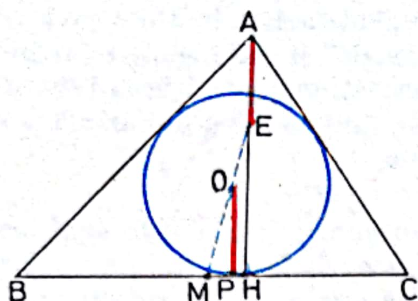


Fig. 80

O altă rezolvare geometrică a acestei probleme se bazează pe următoarea lemă: dacă prelungim raza PO pînă la diametrul PQ al cercului înscris şi ducem dreapta AQ pînă la intersecţia în punctul R cu latura BC, atunci segmentele BP şi CR vor fi egale. Propunem cititorului să demonstreze şi să utilizeze această lemă.

M 54. *Două dreptunghiuri congruente sînt situate astfel încît contururile lor se intersectează în opt puncte. Să se demonstreze că aria părţii comune este mai mare decît jumătatea ariei unuia.*

G. Galperin

Fie date laturile a şi b ale dreptunghiurilor. Remarcăm că pe laturile fiecărui dreptunghi sînt situate exact două puncte de intersecţie cu două laturi vecine ale celuilalt dreptunghi. (Se demonstrează uşor că dacă sînt în total 8 puncte de intersecţie, atunci pe fiecare latură trebuie să fie cel puţin două puncte şi că intersecţia laturii unui dreptunghi cu ambele laturi paralele ale celuilalt dreptunghi este imposibilă.) Fie A şi C punctele în care se intersectează laturile egale cu a, ale celor două dreptunghiuri; B şi D punctele în care se intersectează laturile egale cu b. Atunci este evident că segmentul AC serveşte ca bisectoare a unghiului dintre laturile a duse prin punctul A (pentru aceasta este suficient să coborîm pe aceste laturi perpendiculare din punctul C şi să examinăm perechea de triunghiuri congruente astfel formate). La fel BD este bisectoarea unghiului dintre laturile de lungime b duse prin punctul B. Prin urmare, $AC \perp BD$ şi de aceea aria patrulaterului convex cu diagonalele AC şi BD este $\frac{AC \cdot BD}{2}$. Întrucît $AC \geqslant b$ şi $BD \geqslant a$, chiar această arie (şi cu atît mai mult întreaga arie a părţii comune a celor două dreptunghiuri) este mai mare decît $\frac{ab}{2}$.

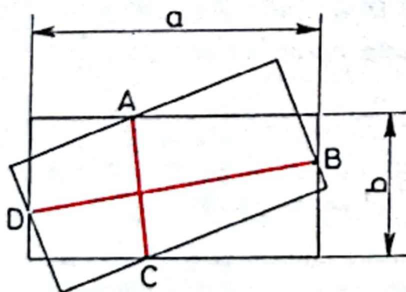


Fig. 81

Cum arată rezolvările trimise, ceea ce a fost mai greu în această problemă a fost faptul ca să se demonstreze riguros indiferent de cazurile de figură posibile. De aceea, anume nu ne-am referit în demonstraţie la figura dată, pentru ca să subliniem că rezolvarea se poate face formal fără a ne referi la un desen concret.

M 55. *Toate numerele naturale scrise în sistemul zecimal cu nu mai mult de n cifre se împart în două grupe. În prima grupă intră toate numerele pentru care suma cifrelor este impară, în a doua, în care este pară. Să se demonstreze că dacă $1 \leqslant k < n$, atunci suma puterilor k a tuturor numerelor din prima grupă este egală cu suma puterilor k ale tuturor numerelor din grupa a doua.*

Vom demonstra această afirmaţie prin inducţie după n. Vom conveni ca în faţa numerelor cu mai puţin de n cifre să scriem atîţia de zero încît să aibă n cifre toate numerele.

Justeţea afirmaţiei pentru $n = 2$ (atunci k poate să ia numai o valoare $k = 1$) se verifică uşor:

Numere cu suma cifrelor impară	Numere cu suma cifrelor pară
$01 + 03 + 05 + \dots + 09 + 10 + 12 + \dots + 18 + 21 + 23 + \dots + 29 + 30 + 32 + \dots + 38 + \dots\dots + 81 + 83 + \dots + 89 + 90 + 92 + \dots + 98 = 5(00 + 20 + \dots + 80) + 5(10 + 30 + \dots + 90) + 5(01 + 03 + \dots + 09) + 5(00 + 02 + \dots + 08)$	$00 + 02 + \dots + 08 + 11 + 13 + \dots + 19 + 20 + 22 + \dots + 28 + 31 + 33 + \dots + 39 + \dots\dots + 80 + 82 + \dots + 88 + 91 + 93 + \dots + 99 = 5(00 + 20 + \dots + 80) + 5(10 + 30 + \dots + 90) + 5(00 + 02 + \dots + 08) + 5(01 + 03 + \dots + 09)$

Trecerea de la n la $n + 1$ nu e mult mai grea. Pentru evitarea neclarităţii şi pentru a nu mai folosi atîtea puncte e util să se folosească semnul sumei Σ. Vom nota numerele cu n cifre avînd suma cifrelor impară (începînd cu 00 ... 00) prin litera a şi cele cu suma cifrelor impară (începînd cu 00 ... 01) prin litera b. E uşor de văzut că fiecare dintre variabilele a şi b pot să ia $5 \cdot 10^{n-1}$ valori diferite. Mai departe, fie A care ia valorile $A = 10^n \cdot p$, unde p este una dintre cifrele 0, 2, 4, 6, 8, iar B, valorile $B = 10^n q$, unde q este una dintre cifrele 1, 3, 5, 7, 9. Trebuie să demonstrăm că pentru orice număr natural $k < n$,

$$\Sigma(A + b)^k + \Sigma(B + a)^k = \Sigma(A + a)^k + \Sigma(B + b)^k \qquad (*)$$

(fiecare sumă se ia după toate perechile posibile de valori ale literelor din parantezele rotunde de sub semnul Σ) cu condiţia că deja s-a demonstrat egalitatea sumelor $\Sigma\, a^j$ şi $\Sigma\, b^j$ pentru toţi $j \leqslant n - 1$: $\Sigma\, a^k = \Sigma\, b^k = S_k$. Desfacem în (*) fiecare paranteză utilizînd formula

$$(X + y)^k = X^k + C_k^1\, X^{k-1}\, y + \dots + C_k^j X^{k-j}\, y^j + \dots + y^k$$

şi verificăm că pentru fiecare j separat sumele termenilor de forma $X^{k-j}\, y^j$ din partea dreaptă şi stîngă a egalităţii sînt egale (coeficientul C_k^j nu-l mai scriem):

	Numere cu suma cifrelor impară	Numere cu suma cifrelor pară
Suma termenilor de forma X^k	$5 \cdot 10^{n-1}\, \Sigma A^k + 5 \cdot 10^{n-1}\, \Sigma B^k$	$5 \cdot 10^{n-1}\, \Sigma A^k + 5 \cdot 10^{n-1}\, \Sigma B^k$
Suma termenilor de forma $X^{k-j} y^j$ $1 \leqslant j \leqslant k - 1$	$\Sigma A^{k-j}\, b^j + \Sigma B^{k-j}\, a^j = \Sigma b^j\, \Sigma A^{k-j} + \Sigma a^j\, \Sigma B^{k-j} = s_j(\Sigma A^{k-j} + \Sigma B^{k-j})$	$\Sigma A^{k-j}\, a^j + \Sigma B^{k-j}\, b^j = \Sigma a^j\, \Sigma A^{k-j} + \Sigma b^j\, \Sigma B^{k-j} = s_j(\Sigma A^{k-j} + \Sigma B^{k-j})$
Suma termenilor de formă y^k	$5\Sigma b^k + 5\Sigma a^k$	$5\Sigma a^k + 5\Sigma b^k$

Observăm că raționamentul precedent pentru $n = 2$ cu ajutorul unor notații analoage se poate scrie astfel:

$\Sigma(A + b) + \Sigma(b + a) = 5\Sigma A + 5\Sigma a + 5\Sigma b + 5\Sigma a$, $\Sigma(A + a) + \Sigma(B + b) = 5\Sigma A + 5\Sigma a + 5\Sigma B + 5\Sigma b$ pentru $k = 1$ rămîn numai primul și ultimul termen corespunzători lui $j = 0$ și $j = k$.

E ușor de văzut că afirmația problemei este adevărată nu numai în sistemul zecimal ci în orice altă bază d, unde d este un număr par (gîndiți-vă unde s-a folosit în demonstrația noastră paritatea lui $d = 10$). Dacă se ia $d = 2$ se obține următorul șir de egalități interesante:

$1 + 2 = 3$
$1 + 2 + 4 + 7 = 3 + 5 + 6$
$1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 = 3^2 + 5^2 + 6^2$
$1 + 2 + 4 + 7 + 8 + 11 + 13 + 14 = 3 + 5 + 6 + 9 + 10 + 12 + 15$
$1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 11^2 + 13^2 + 14^2 = 3^2 + 5^2 + 6^2 + 9^2 + 10^2 + 12^2 + 15^2$
$1^3 + 2^3 + 4^3 + 7^3 + 8^3 + 11^3 + 13^3 + 14^3 = 3^3 + 5^3 + 6^3 + 9^3 + 10^3 + 12^3 + 15^3$
....

M 56. *Pe o circumferință se scriu într-o ordine arbitrară patru de 1 și cinci de 0. Apoi, în intervalul dintre două numere la fel se scrie 0 iar între două diferite se scrie 1, iar primele cifre se șterg. Să se arate că ori de cîte ori am repeta procedeul nu se vor obține nouă de 0.**

Se poate demonstra ușor chiar o afirmație mai tare: dacă pe o circumferință se scriu un număr impar N de 1 și de 0 — să fie și 0 și 1 — atunci ori de cîte ori am repeta procedeul descris în problemă nu vom obține N de 0. Într-adevăr, să presupunem că la un anumit pas 1 t, am obținut prima dată numai zerouri. Atunci la pasul $t - 1$ toate cele N cifre ar fi fost la fel, și nu toate 0, deci toate 1, iar la pasul $t - 2$ fiecare două cifre vecine ar trebui să fie diferite, dar întrucît N este impar o asemenea dispoziție a lui 0 și 1 pe circumferință, nu e posibilă.

Totodată am răspuns (deocamdată pentru N impar) la chestiunea care a rămas neexaminată în rezolvarea problemei M19; în această problemă zerourile se numeau „celule liniștite" iar unitățile „celule excitate" iar regula de trecere era aceeași. În acești termeni rezultatul se poate formula astfel: dacă N este impar și în momentul inițial nu toate celulele sînt excitate (și nu toate sînt liniștite) atunci excitația niciodată nu se liniștește.

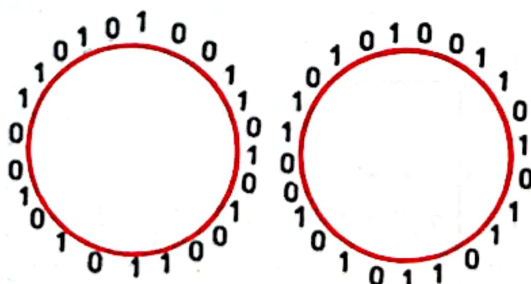


Fig. 82. Zerourile și unitățile din desenul din stînga, după 8 pași se transformă în zerouri.

Ce se întîmplă pentru ceilalți N? Pentru ca să lămurim acest lucru ne vom folosi de o lemă (care se poate demonstra prin inducție după k ea este adevărată și pentru problema pe dreaptă și pentru cerc): dacă pentru $t = 0$ pe locul 2^{k-1} în ambele părți față de o cifră dată a, sînt cifre la fel, atunci după $t = 2^k$ pași în locul lui a va fi zero, iar dacă sînt diferite va fi unu. De aici rezultă direct că dacă $N = 2^m$ unde m este un număr natural, atunci din orice aranjare după N pași vor rămîne numai zerouri.

Fie acum $N = 2^m L$ unde L este impar. Să urmărim modificările care apar după

* Problemele 56–60 sînt din „Culegerea" de Dinkin E, B, ș.a.

fiecare $T = 2^m$ paşi. Pentru fiecare L cifre distanţate prin 2^m una de alta (în vîrfurile unui poligon regulat cu L laturi) aceste modificări vor fi exact aceleaşi ca şi cum numai aceste L cifre ar fi dispuse pe cerc, cu ele se repetă acelaşi proces şi l-am urmărit la fiecare pas. De aici se obţine uşor răspunsul în cazul cel mai general: situaţia „toate zero" se atinge atunci şi numai atunci cînd şirul format din 0 şi 1 este periodic cu perioada 2^m (vezi figura 82).

M 57. a) *Să se găsească numărul k, divizibil prin 2 şi 9 şi care are în total 14 divizori (inclusiv 1 şi k).*

b) Să se demonstreze că dacă înlocuim pe 14 cu 15 atunci problema are mai multe soluţii, iar prin înlocuirea lui 14 cu 17 problema nu are soluţie.

Fie $M = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ descompunerea numărului M în factori primi; pentru fixarea ideilor vom considera $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \alpha_r \geqslant 1$. Divizorii numărului M au aspectul $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}$ unde fiecare β_i, independent de ceilalţi poate lua valorile $0, 1, \ldots, \alpha_i$, şi de aceea numărul total de diviziori ai lui M (inclusiv 1 şi M) este egal cu $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_r + 1)$.

a) 14 poate fi descompus în factori într-un singur mod $14 = 7 \cdot 2$, de aceea, dacă M are 14 divizori rezultă, $r = 2$, $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 1$. Mai ştim că 3 intră în descompunerea lui M cu un exponent mai mare decît 1, iar 2 cu un exponent mai mare decît 0. De aici rezultă că $M = 3^6 \cdot 2 = 1458$.

b) Pentru 15 divizori putem avea soluţiile $M = 3^2 \cdot 2^4$ şi $M = 3^4 \cdot 2^2$, iar 17 divizori poate să aibă numai un număr de forma $M = p^{16}$ unde p este prim.

M 58. *În plan se dau trei drepte concurente. Pe una dintre ele este marcat un punct. Se ştie că dreptele sînt bisectoarele unui triunghi şi punctul este unul dintre vîrfuri. Să se construiască triunghiul.*

P r i m a r e z o l v a r e. Presupunem că O este punctul de intersecţie a bisectoarelor AK, BL, şi CM ale triunghiului ABC (vezi figura 83).

Atunci:

$$\sphericalangle MOB = \sphericalangle OCB + \sphericalangle OBC = \frac{1}{2}(\sphericalangle ACB + \sphericalangle ABC) = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle CAK,$$

adică $\sphericalangle CAK = \frac{\pi}{2} - \alpha$. De aceea, dacă sînt date dreptele AK, BL, CM şi punctul A, atunci, construind de o parte şi de alta a semidreptei AO unghiuri

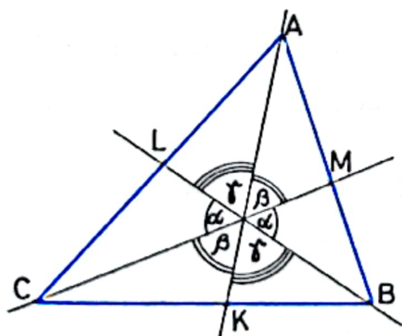


Fig. 83

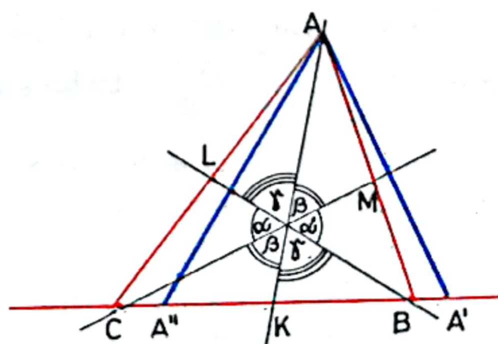


Fig. 84

congruente $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, vom găsi vîrfurile căutate B şi C (cu condiţia ca $\varphi > 0$, $\varphi < \beta$ şi $\varphi < \gamma$). Mai trebuie demonstrat că în triunghiul ABC construit, dreptele BL şi CM sînt bisectoare. Unghiurile ABL şi ACM se calculează uşor, ele sînt respectiv egale cu $\frac{\pi}{2} - \beta$ şi $\frac{\pi}{2} - \gamma$. Greutatea constă doar în a demonstra că $\sphericalangle LBC = \frac{\pi}{2} - \beta$ şi $\sphericalangle MCA = \frac{\pi}{2} - \gamma$ (este clar că suma lor este egală cu α); acest lucru se poate face, de exemplu, astfel: dacă $\sphericalangle LBC < \sphericalangle ABL$, atunci bisectoarea unghiului ABC va tăia segmentul AO, de aceea bisectoarea unghiului ACB de asemenea îl va tăia şi înseamnă că $\sphericalangle MCB < \sphericalangle ACM$, deci suma $\sphericalangle LBC + \sphericalangle MBC$ este mai mică decît $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \alpha$. La fel se poate demonstra că nu e posibil cazul $\sphericalangle LBC > \sphericalangle ABL$.

A doua rezolvare. Construim punctele A' şi A'', simetricele punctului A faţă de bisectoarele care nu trec prin A. Este clar că ambele puncte A' şi A'' trebuie să fie situate pe dreapta BC (pe latura triunghiului căutat sau pe prelungirea ei). Ducînd o dreaptă prin A' şi A'' vom găsi punctele căutate B şi C (vezi figura 84).

Remarcăm că deşi a doua rezolvare este mai efectivă, în aceasta este mai greu de pus în evidenţă condiţiile în care problema are soluţie. Aceste condiţii sînt: $\alpha < \pi/2$, $\beta < \pi/2$, $\gamma < \pi/2$. (întrucît $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, ele pot fi scrise şi astfel: $\alpha + \beta > \pi/2$, $\beta + \varphi > \pi/2$, $\gamma + \alpha > \pi/2$). Dacă sînt îndeplinite, soluţia este unică. Gîndiţi-vă cum pot fi obţinute aceste condiţii în fiecare dintre modurile de rezolvare expuse mai sus.

1 4	2 3	5
1 6	2 5	3 4
4 8	5 7	1 2 3 6
6 9	7 8	1 2 4 3 5

Fig. 85

M 59. *Sînt mai multe mase avînd 1 g, 2 g, 3 g, ..., n g. Ele trebuie împărţite în trei grămezi de mase egale. Pentru ce valori ale lui n se poate face aceasta?*

Vom arăta că acest lucru se poate face dacă şi numai dacă $n > 3$ şi unul dintre numerele n sau $n + 1$ se divide prin 3 (adică pentru n egal cu 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, ...).

Necesitatea acestor condiţii e evidentă, întrucît masa totală $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ trebuie să se dividă la 3.

Pentru demonstraţie, este suficient să observăm la început că împărţirea este posibilă pentru $n = 5, 6, 8, 9$ (vezi figura 85). Toate celelalte valori ale lui n care ne interesează se obţin din acestea patru prin adăugarea unor multipli de şase dar orice grupă formată din şase numere naturale consecutive $a + 1, \ldots, a + 6$ se împarte uşor în trei perechi de numere care au sume egale: $a + 1$ şi $a + 6$, $a + 2$ şi $a + 5$, $a + 3$ şi $a + 4$.

M 60. *Considerăm toate numerele naturale scrise în baza 10 numai cu cifrele 1 şi 0. Să se descompună aceste numere în două grupe, astfel încît suma oricăror două numere diferite din aceeaşi grupă să conţină, în scrierea zecimală, cel puţin doi de 1.*

Vom separa într-o grupă toate numerele în scrierea cărora intră un număr impar de 1 şi în cealaltă grupă cele care au un număr par de 1. Atunci este clar că într-o grupă nu pot să fie două numere care să se deosebească numai la un singur rang, de aceea această descompunere satisface cerinţa problemei (1 va apare la acele ranguri ale sumei la care un număr are 1 iar celălalt 0). Mulţi rezolvitori au prezentat raţionamente care arată că descompunerea descrisă: prima grupă: 1, 10, 100, 111, 1000, 1011, 1101, 1110.
grupa a doua: 11, 101, 110, 1001, 1010, 1100, 1111, 10001, este unică.

M 61. *Doi isteţi joacă un nou joc care constă în următoarele. Se scriu numerele 0, 1, 2, ..., 1024. Primul taie, la alegerea sa, 512 numere, apoi al doilea taie 256 numere dintre cele rămase, apoi din nou primul taie încă 128, apoi al doilea încă 64 ş.a.m.d. Cu ultima sa manevră, a cincea, al doilea taie un singur număr. Rămîn două numere şi al doilea îi plăteşte primului diferenţa dintre aceste două numere. Cum trebuie să joace primul, pentru ca să obţină cît mai mult posibil? Cum trebuie să procedeze al doilea pentru a pierde cît mai puţin? Cît trebuie să plătească al doilea primului dacă ambii joacă în modul cel mai bun?*

A XXXII-a Olimpiadă matematică din Moscova

Răspuns: La un joc corect diferenţa numerelor rămase este 32 (cum se spune, „preţul jocului" este 32).

La acest răspuns conduc următoarele consideraţii: primul jucător tinde ca diferenţele dintre numerele rămase să fie cît mai mari şi el trebuie să se străduiască tot timpul să „împrăştie" cît mai mult mulţimea de numere rămase, iar celui de-al doilea îi convine să taie numerele „de pe margini" (vezi figura 86).

Aceste consideraţii, desigur, nu reprezintă o demonstraţie riguroasă. Mulţi rezolvitori, utilizînd nişte consideraţii care la prima vedere nu sînt mai puţin îndreptăţite, ca, de exemplu, acestea: primul trebuie să taie numerele din mijloc pentru ca să rămînă numere cu diferenţe mari, au obţinut răspunsuri incorecte: 1 sau 5 sau 6 ş.a.

Pentru ca să fundamentăm complet răspunsul, în această problemă ca şi în orice altă situaţie de joc, trebuie să se demonstreze două afirmaţii: 1) oricum ar juca al doilea, primul poate să obţină cel puţin 32; 2) oricum ar juca primul, al doilea poate pierde cel mult 32.

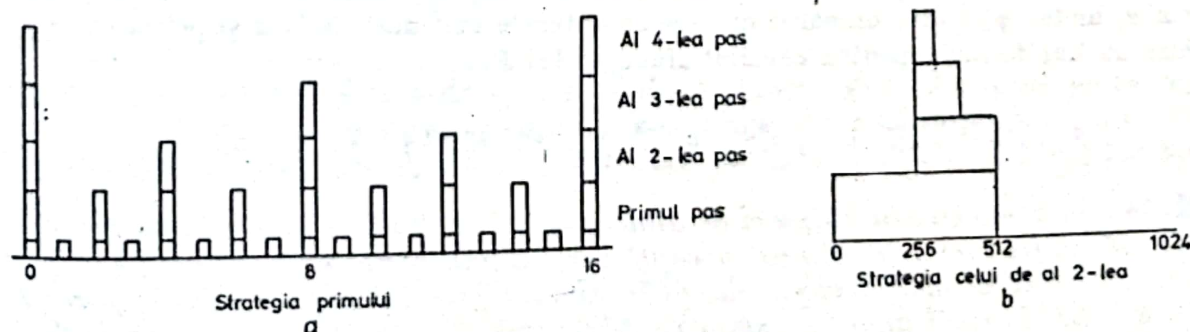


Fig. 86

Pentru demonstrația afirmației 1) vom indica o astfel de strategie a primului jucător, încît indiferent de manevrele celui de-al doilea să asigure că diferența între numerele rămase nu e mai mică decît 32. Această strategie se descrie foarte simplu. La fiecare pas să se taie numerele din două în două, adică al doilea, al patrulea, al șaselea din cele rămase (presupunem că numerele sînt scrise în ordine crescătoare). Atunci după primul pas diferența dintre oricare două numere rămase nu e mai mică decît 2, după al doilea pas, decît 4, după al treilea, decît 8, după al patrulea decît 16 și după al cincilea decît 32.

Pentru demonstrația afirmației 2) este suficient să indicăm strategia celui de-al doilea jucător, care independent de pașii primului să-i permită să nu piardă mai mult decît 32. Ea constă în următoarele. La primul pas el taie toate numerele mai mici decît 512 sau toate numerele mai mari decît 512 (e clar că sau de unele sau de altele rămîn mai multe decît 256). După aceasta, diferența dintre numerele extreme rămase nu va fi mai mare decît 512. În mod analog, după al doilea pas el poate reuși ca toate numerele rămase să se găsească într-unul dintre intervalele [0, 256]; [256, 512]; [512, 768]; [768, 102 4] adică să micșoreze diferența dintre numerele extreme pînă la 256. La fel după al treilea pas, el poate micșora diferența pînă la 128, la al patrulea pînă la 64 și la al cincilea pînă la 32.

Desigur, în mod analog s-ar putea demonstra că dacă jocul constă din n pași și se începe cu numerele 0, 1, 2, ..., 2^{2n}, atunci „prețul jocului“ este 2^n. Dar o cercetare amănunțită a unui asemenea joc care să înceapă cu o mulțime arbitrară de numere (nu neapărat o progresie aritmetică) este o problemă cu mult mai grea.

M 62. *Să se demonstreze că pentru orice număr impar a, se găsește un număr natural b, astfel încît $2^b - 1$ se divide la a.*

Iată demonstrația cea mai scurtă.

Considerăm numerele $2^0 - 1, 2^1 - 1, 2^2 - 1, \ldots, 2^a - 1$. Acestea sînt $a + 1$ numere. Două dintre ele cel puțin dau aceleași resturi la împărțirea prin a căci sînt numai a astfel de resturi diferite (acest raționament se numește „principiul lui Dirichlet“). Să presupunem că $2^k - 1$ și $2^m - 1$ dau resturi egale la împărțirea prin a și $k < m$. Atunci numărul $(2^m - 1) - (2^k - 1) = 2^k (2^{m-k} - 1)$ se divide prin a și întrucît a este impar, rezultă că $2^{m-k} - 1$ se divide la a.

La fel se demonstrează și următoarea afirmație mai generală: dacă numerele naturale a și c sînt prime între ele atunci se găsește un număr natural b încît $c^b - 1$ se divide prin a. Mulți cititori au remarcat faptul că afirmația problemei rezultă din următoarea teoremă a lui Euler: pentru orice numere naturale a și c, numărul $c^{\varphi(a)+1} - c$ se divide prin a, unde $\varphi(a)$ este numărul numerelor naturale mai mici decît a și prime cu el și chiar au dat formula pentru calculul „funcției lui Euler“.

$$\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \ldots (p_r^{\alpha_r} - p_r^{\alpha_r - 1}).$$

M 63. *Se poate ca din 18 plăci de dimensiuni 1 × 2 să se facă un pătrat astfel încît să nu fie nici o „cusătură“ dreaptă care să unească laturile opuse ale pătratului, mergînd pe marginea plăcilor? (De exemplu aranjarea plăcilor din figura 87 nu e bună, întrucît apare „cusătura“ AB).*

A.A. Kirillov

Să presupunem că am reuşit să facem un pătrat de 6×6 din plăcile 1×2 fără „cusături". Atunci, oricare dintre cele 10 drepte care taie acest pătrat în pătrăţele de 1×1 trebuie să se intersecteze cel puţin cu o placă 1×2. Nu e greu de demonstrat că fiecare astfel de dreaptă intersectează în mod obligatoriu un număr par de plăci. Într-adevăr ea taie din pătratul 6×6 un dreptunghi $6 \times k$ care constă dintr-un număr par de pătrăţele 1×1; acest dreptunghi conţine un anumit număr întreg de plăci 1×2 şi încă un număr par de pătrăţele 1×1, jumătatea plăcuţelor secţionate de dreaptă (vezi figura 88).

Dar dacă fiecare dreaptă intersectează cel puţin două plăci, atunci numărul total de plăci trebuie să fie cel puţin $2 \cdot 10 = 20$ pe cînd numărul lor este 18.

Astfel am demonstrat că pătratul 6×6 nu poate fi tăiat în plăcute în modul cerut.

În majoritatea scrisorilor primite s-a abordat şi următoarea problemă mai generală: cînd un dreptunghi $m \times n$ poate fi tăiat în plăci 1×2 fără cusături? Este uşor de demonstrat că dreptunghiurile $2 \times n$, $3 \times n$ şi $4 \times n$ nu se pot tăia astfel. Dacă însă $m \geqslant 5$, $n \geqslant 5$ şi mn este par (ultima condiţie evident e necesară), atunci în toate cazurile, în afară de cel examinat 6×6 există descompunerea cerută. Pentru demonstraţie este suficient să se studieze descompunerea dreptunghiurilor 5×6 şi 6×8 şi să se observe că din descompunerea dreptunghiului $m \times n$ se obţine uşor descompunerea dreptunghiului $(m + 2) \times n$ (figurile 89 şi 90).

N.B. Vasiliev

A

B

Fig. 87

Fig. 88

Fig. 89

Fig. 90

M 64. *În plan sînt date o dreaptă d şi două puncte P şi Q situate de aceeaşi parte a ei. Să se găsească pe dreapta d un punct M astfel încît distanţa dintre picioarele înălţimilor triunghiului PQM duse pe laturile PM şi QM să fie minimă.*

G.A. Palatnik

Să observăm că picioarele înălţimilor PK şi QH ale triunghiului PQM sînt situate pe un cerc c cu diametrul PQ. Considerăm două cazuri:

1) Cercul c are un punct sau două comune cu dreapta d. Atunci este evident că oricare dintre aceste puncte este punctul căutat M;

triunghiul PQM este dreptunghic şi distanţa dintre picioarele înălţimilor este nulă; punctele K şi H coincid cu M.

2) Cercul c nu are puncte comune cu dreapta d. Atunci, este uşor de demonstrat că unghiul ascuţit înscris în cerc care cuprinde arcul KH este $90° - \sphericalangle PMQ$. Într-adevăr, pentru orice poziţie a punctului M, cel puţin unul dintre punctele K sau H este situat pe o latură a triunghiului PQM şi nu pe prelungirea ei; fie, de exemplu, H. Atunci, $\sphericalangle KHP = 90° - \sphericalangle QMP = \sphericalangle KPM = 90° - \sphericalangle KMP$. Astfel coarda KH este cu atît mai mică cu cît este mai mare unghiul QMP (figura 91).

Rămîne să se rezolve următoarea problemă: să se găsească pe dreapta d un punct M pentru care unghiul PQM este maxim. Nu e greu de bănuit că punctul M trebuie să aibă următoarele proprietăţi: cercul care trece prin punctele P, Q şi M este tangent la dreapta d. Pentru ca să construim punctul M trebuie (în cazul în care segmentul PQ nu este paralel cu dreapta d) ca de la punctul C de intersecţie a lui PQ cu d să se ia pe dreapta d segmentele $CM_1 = CM_2 = \sqrt{CP \cdot CQ}$ şi apoi dintre punctele obţinute M_1 şi M_2 să se aleagă acela pentru care unghiul M_iCP este ascuţit (sau drept). Demonstraţia faptului că chiar pentru acest punct unghiul PMQ este maxim, este aproape evidentă şi o lăsăm cititorului (figura 92).

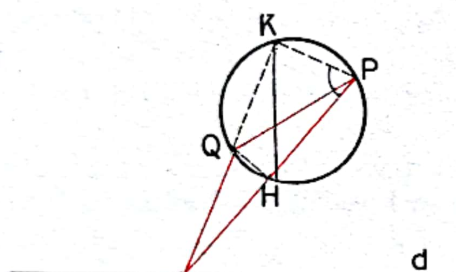


Fig. 91

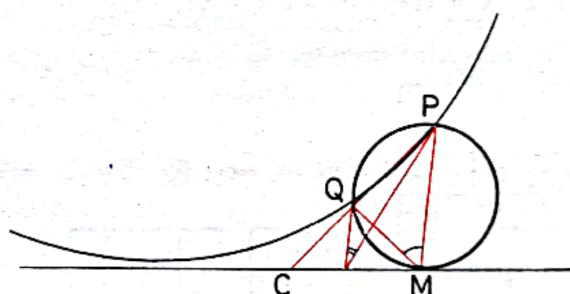


Fig. 92

M 65. a) *Fie E, F, G trei puncte pe laturile AB, BC şi CA ale triunghiului ABC pentru care*

$$\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{CG}{GA} = k \text{ unde } 0 < k < 1.$$

Să se găsească raportul dintre aria triunghiului KLM format de dreptele AF, BG şi CE şi aria triunghiului ABC (vezi figura 93, a).

b) *Să se desfacă triunghiul prin şase drepte în astfel de bucăţi din care să se poată compune şapte triunghiuri congreuente.*

A.L. Soifer

a) Notăm aria triunghiului cu vîrfurile X, Y, Z cu $s(XYZ)$. Folosind faptul că raportul ariilor a două triunghiuri cu aceleaşi înălţimi (sau cu aceleaşi baze) este egal cu raportul bazelor (respectiv raportul înălţimilor) se justifică uşor că:

$$s(ACK) = \frac{1}{k}\, s(ABK) = \frac{k+1}{k^2}\, s(AEK) = \frac{k+1}{k^2+k+1}\, s(AEC) =$$

$$= \frac{k}{k^2+k+1}\, s(ABC).$$

Analog se poate demonstra că

$$s(BLA) = s(CMB) = \frac{k}{k^2 + k + 1}\, s(ABC).$$

De aceea

$$\frac{s(KLM)}{s(ABC)} = 1 - \frac{3k}{k^2 + k + 1} = \frac{(1-k)^2}{k^2 + k + 1} = \frac{(1-k)^3}{1 - k^3}.$$

b) Observăm că pentru $k = 1/2$ acest raport este egal cu $1/7$ şi fiecare dintre cele trei segmente AF, BG, CE le împarte pe celelalte două în rapoartele $3:3:1$, aşa că dacă se duc prin punctele M, K, L încă trei drepte paralele respectiv cu aceste trei segmente, atunci fiecare dintre laturile triunghiului ABC va fi împărţită în rapoartele $2:1:1:2$.

Acum este uşor ca din cele 13 bucăţi în care a fost împărţit triunghiul ABC, să se compună 7 triunghiuri congruente (unul dintre ele constă dintr-o singură bucată KLM; vezi figura 93, b).

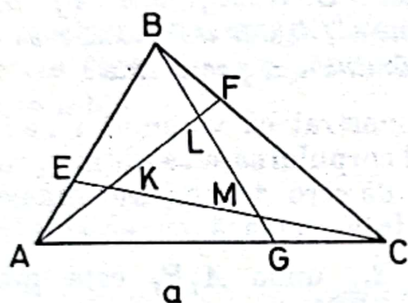


Fig. 93, a

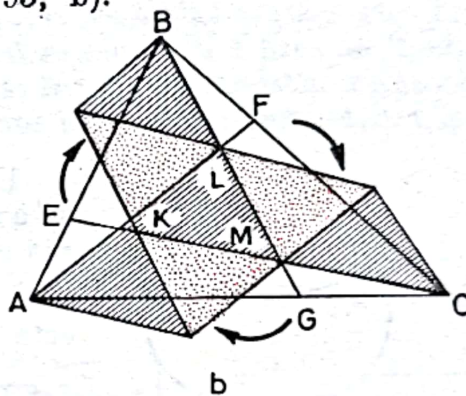


Fig. 93, b

M 66. *Iată cîteva exemple în care suma pătratelor a k numere naturale succesive este egală cu suma pătratelor următoarelor k — 1 numere naturale:*

$$3^2 + 4^2 = 5^2,\ 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2.$$

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$$

Găsiţi formula generală care cuprinde toate aceste cazuri.

A.I. Milovanov

Să demonstrăm că pentru fiecare număr natural k, există numai un singur număr natural n, astfel încît

$$(n-k+1)^2 + (n-k+2)^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (n+k-1)^2 \quad (1)$$

(observaţi că în membrul drept sînt $k - 1$ termeni, iar în cel stîng k). Egalitatea (1) este echivalentă cu următoarele:

$$n^2 = [(n+1)^2 - (n-k+1)^2] + [(n+2)^2 - (n-k+2)^2] + \ldots + [(n+k-1)^2 - (n-1)^2] \quad (2)$$

$$n^2 = k(2n-k+2) + k(2n-k+4) + \ldots + k(2n+k-2), \quad (3)$$

$$n^2 = 2k(k-1)n. \quad (4)$$

Astfel afirmaţia enunţată a fost demonstrată: egalitatea (1) pentru numerele naturale k şi n este satisfăcută atunci şi numai atunci cînd $n = 2k^2 - 2k$. (În trecerea de la (3) la (4) am folosit faptul că suma a $k - 1$ termeni ai progresiei aritmetice $(2n - k + 2) + (2n - k + 4) + \ldots + (2n + k - 2)$ este egală cu $(k - 1)\frac{(2n - k + 2) + (2n + k - 2)}{2} = 2(k - 1)n$). Am obţinut astfel formula generală căutată. Ea poate fi scrisă de exemplu astfel:

$$(2k^2 - 3k + 1)^2 + (2k^2 - 3k + 2)^2 + \ldots + (2k^2 - 2k)^2 = (2k^2 - 2k + 1)^2$$

$$+ (2k^2 - 2k + 2)^2 + \ldots + (2k^2 - k - 1)^2.$$

unde k este un număr natural oarecare. Exemplele date în textul problemei se obţin pentru $k = 2$, 4 şi 5.

M. 67. *Unui bijutier i s-a comandat un inel de aur de lăţimea h, avînd forma unui corp mărginit de o suprafaţă sferică cu centrul în O şi de suprafaţa unui cilindru de rază r a cărei axă trece prin punctul O (vezi figura 94). Meşterul a făcut un astfel de inel, dar a luat pe r prea mic. Cît aur trebuie să mai adauge dacă r trebuie mărit de k ori iar lăţimea h rămîne cea precedentă?*

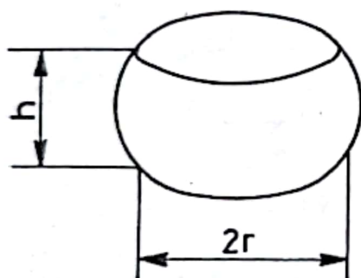


Fig. 94

E uşor de demonstrat că volumul inelului sferic, adică al corpului care se obţine prin rotirea unui segment de cerc AB în jurul diametrului MN care nu se intersectează cu acest segment, este $\frac{\pi}{6} AB^2 \cdot A_1B_1$, unde A_1B_1 este proiecţia coardei AB pe diametrul MN. Această formulă se dă, de exemplu, în cartea lui J. Hadamard „Geometria elementară", partea II, cap. IV, 500. Volumul inelului va fi egal cu $\frac{\pi}{6} h^3$, adică nu depinde de raza r, deci meşterul nu trebuie să adauge aur.

M 68. *Reţeaua de curbe reprezentată în figura 95 este formată din cercuri concentrice de raze 1, 2, 3, 4, ... cu centrul în punctul O, din dreapta d care trece prin punctul O şi din toate tangentele posibile la aceste cercuri paralele cu dreapta d. Tot planul este împărţit astfel în celule pe care le colorăm ca la tabla de şah. În şirul punctelor roşii marcate pe desen, oricare două puncte vecine sînt vîrfurile opuse ale unei celule negre. Demonstraţi că toate punctele unui astfel de şir infinit sînt situate pe o parabolă (de aceea întregul desen parcă e făcut din parabole albe şi negre).*

A.N. Vilenkin

Luăm dreapta d ca axa Ox şi punctul O ca originea sistemului de coordonate, aşa cum e indicat în figura 95. Unitatea de măsură este dată în problemă. Reţeaua de curbe, de care este vorba în problemă, este formată din cercuri de rază n (ecuaţia unui astfel de cerc este $x^2 + y^2 = n^2$) şi din drepte de ecuaţie $y = m$, unde m şi n sînt toate numerele întregi posibile, $n > 0$. Astfel fiecărui punct de intersecţie (sau de tangenţă) a acestor curbe—fiecărui „nod" (x, y) al reţelei — îi corespunde o pereche de valori $n = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi $m = y$. Să observăm că atunci cînd trecem de la un punct roşu la cel vecin,

m şi n se schimbă cu cîte o unitate, aşa că diferenţa lor $n - m = \sqrt{x^2 + y^2} - y$ rămîne constantă; această diferenţă, pentru toate punctele roşii este egală cu 6.

Ecuaţia $\sqrt{x^2 + y^2} - y = 6$ este echivalentă cu următoarele: $x^2 + y^2 = (y + 6)^2$; $y = \frac{x^2}{12} - 3$. Astfel, toate punctele roşii sînt situate pe parabola $y = \frac{x^2}{12} - 3$.

Într-un alt şir asemănător, pe care l-am desenat cu albastru, prin trecerea de la un punct la vecinul său, $\sqrt{x^2 + y^2}$ şi y se modifică, astfel încît suma lor rămîne constantă $\sqrt{x^2 + y^2} + y = 4$. Această ecuaţie, după transformări devine tot ecuaţia unei parabole $y = -\frac{x^2}{6} + \frac{3}{2}$.

La fel se poate demonstra că orice şir infinit de puncte în care două puncte vecine sînt vîrfuri opuse ale unei celule negre (sau ale unui segment) sînt situate pe parabola $y = \frac{x^2}{2p} + \frac{p}{2}$, unde p este un număr întreg oarecare nenul. Reciproc, pe oricare dintre aceste parabole situat un astfel de şir infinit de puncte (acestea sînt punctele de intersecţie a parabolei cu toate dreptele $y = m$).

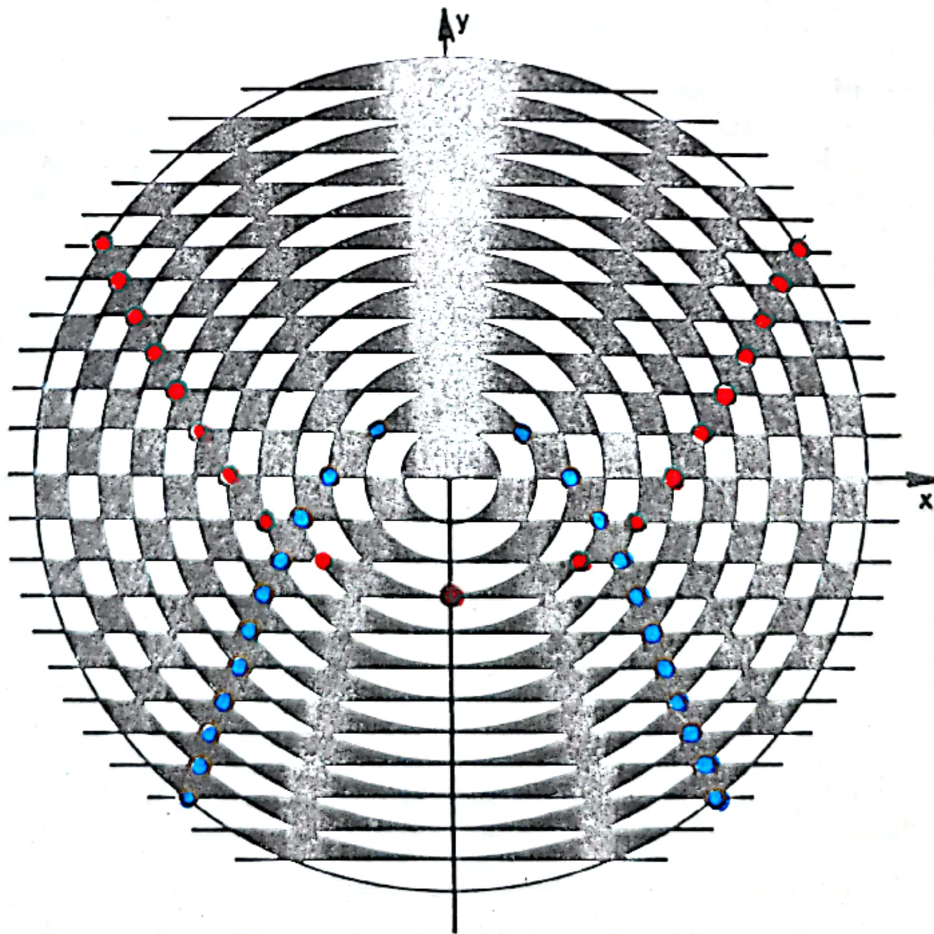


Fig. 95

Observăm că dacă $p < 0$, adică dacă ramurile parabolei merg în jos, atunci pentru p par parabola trece prin celulele negre, iar pentru p impar prin cele albe; dacă $p > 0$, este invers. Astfel că prin fiecare punct de intersecție a dreptelor și a cercurilor din rețea (exceptînd punctele de tangență de pe dreapta $x = 0$) trec două parabole: una trece prin celulele negre, cealaltă prin cele albe; una are ramurile îndreptate în sus cealaltă în jos.

Rezolvarea acestei probleme au trimis-o mulți cititori. Unii au folosit în rezolvare următoarea definiție geometrică a parabolei: parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct și o dreaptă. În esență, rezolvarea problemei M68 este foarte apropiată de demonstrația echivalenței acestei definiții a parabolei și a celei cunoscute din algebră (parabola este graficul trinomului de gradul al II-lea). Dacă se alege un sistem de coordonate, astfel încît punctul dat să fie originea axelor și dreapta dată să aibă ecuația $y = c$, atunci condiția ca punctul (x, y) să fie egal depărtat de punctul dat și dreapta dată se scrie în forma $\sqrt{x^2 + y^2} = |y - c|$, care este echivalentă cu ecuația $y = -\frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2}$.

M 69. *Numărul 76 are următoarea proprietate interesantă: ultimele două cifre ale numărului $76^2 = 5776$ dau din nou numărul 76.*

a) Mai există astfel de numere formate din două cifre?

b) Găsiți toate numerele de trei cifre A, astfel încît ultimele trei cifre ale numărului A^2 formează numărul A.

c) Există un șir infinit de cifre $a_1, a_2, a_3, \ldots$, astfel încît pentru orice n, pătratul numărului „$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$" să aibă aspectul „$\ldots a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1$"? (Prin ghilimele am notat aici scrierea zecimală a numărului. Răspunsul banal $a_i = 0$ pentru toți $i > 1$ îl excludem).

Răspunsul în această problemă este următorul: pentru orice $n > 1$ există exact două astfel de numere cu n cifre $n > 1$, pătratul cărora se termină în A (ne luînd în considerare cele evidente 0 … 000 și 0 …0001), pentru $n = 2$ acestea sînt 76 și 25 pentru $n = 3$ sînt 376 și 625, pentru $n = 4$ sînt 9376 și 0625, pentru $n = 5$ sînt 09376 și 90625 ș.a.m.d. așa că există două șiruri infinite de cifre de care este vorba la punctul c): unul începe cu cifrele 6, 7, 3, 9, 0, 1, …, celălalt cu cifrele 5, 2, 6, 0, 9, 8, … (n-am exclus numerele la care prima sau primele cifre sînt nule).

Începem cu problema a). Cel mai simplu mod de a găsi numerele cu două cifre necesare constă în următoarele. Dacă A^2 se termină în aceleași două cifre ca și A, atunci $A^2 - A = A(A - 1)$ se divide la $100 = 25 \cdot 4$, iar întrucît numerele A și $A - 1$ sînt prima între ele (nu au divizori comuni mai mari decît 1) unul dintre ele trebuie să se dividă la 25 iar celălalt la 4. Verificăm dacă numerele 25,50 și 75 pot să joace rolul lui A sau a lui $A - 1$ (ambele aceste numere sînt cu două cifre). Pentru aceasta trebuie doar să se verifice care dintre numerele vecine cu ele se divid la 4. Acestea vor fi numai 76 și 24 de aceea A poate să fie egal numai cu 25 și 76.

În mod analog poate fi rezolvată problema b) dar vom demonstra deodată o afirmație mai generală: dacă pătratul numărului $B =$ „$a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1$" se termină cu cifrele „$\ldots a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1$", atunci se poate alege în mod unic cifra a_n astfel încît pătratul numărului $A = \ldots$„$a_n a_{n-1} \ldots a_1$" să se termine în „$\ldots a_n\, a_{n-1} \ldots a_1$".

Fie $B^2 =$ „$b_n a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1$". Atunci $(n \geqslant 2 \Rightarrow 2n > n + 1)$.

$$A^2 = (10^n a_n + B) = 10^{2n} a_n + 2 \cdot 10^n a_n B + B^2 = „\ldots c_n a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1“$$

unde c_n este ultima cifră a numărului $2a_n a_1 + b_n$. Trebuie să alegem pe a_n astfel încît c_n să fie egal cu a_n adică $2a_n a_1 + b_n - a_n = (2a_1 - 1)a_n + b_n$ să se dividă la 10.

Evident că acest lucru se poate face şi anume într-un mod unic. În cazurile care ne interesează pe noi, $a_1 = 5$ şi $a_1 = 6$, funcţiile $b_n \to a_n$ care trebuie să le indicăm sînt deosebit de simple: dacă $a_1 = 5$, atunci $a_n = b_n$, iar dacă $n = 6$, atunci $a_n = 10 - b_n$ pentru $b_n > 0$ şi $a_n = 0$ pentru $b_n = 0$.
Mai multe amănunte despre rezolvarea acestei probleme vezi în cartea Ia. I. Perelman: „Algebră recreativă".

Observăm că afirmaţia demonstrată mai sus poate fi reformulată astfel: din rezolubilitatea congruenţei $x^2 - x = 0 \pmod{10^n}$ rezultă rezolubilitatea ei modulo 10^{n+1}. Această afirmaţie am folosit-o pentru ca să construim două soluţii nebanale ale ecuaţiei $x^2 - x = 0$ în numere 10-adice (analog cu teoria numerelor p-adice pentru p prim, se pot construi numere m-adice pentru m compus, dar acestea nu mai au multe proprietăţi de care se bucurau numerele p-adice şi numerele reale obişnuite. De exemplu, produsul a două numere m-adice nenule poate fi egal cu zero, ecuaţia de gradul II pe care am dat-o mai sus poate avea mai mult de două soluţii ş.a.m.d.) care sînt numere „infinite la stînga": $x_1 =$ „...890625" şi $x_2 =$ „...109376" (numim soluţii banale pe 0 = = „...0000" şi 1 = „...0001"). Verificaţi următoarele două proprietăţi ale numerelor construite: $x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = 0$. Gîndiţi-vă pentru ce alţi m ecuaţia $x^2 - x = 0$ are soluţii în numere m-adice diferite de 0 şi 1.

N.B. Vasiliev

M 70. *Fie $d_1, d_2, \ldots, d_n$ nişte drepte într-un plan, printre care sînt două care se intersectează. Să se demonstreze că se poate alege într-un mod unic pe fiecare dintre aceste drepte cîte un punct $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încît perpendiculara ridicată din punctul x_i pe dreapta d_i să treacă prin punctul x_{i+1} (pentru toţi $i = 1, 2, \ldots, n - 1$) şi perpendiculara ridicată pe d_n din punctul x_n să treacă prin punctul x_1.*

Încercaţi să formulaţi şi să demonstraţi o problemă analoagă în spaţiu.

N.B. Vasiliev

Această problemă mai poate fi formulată în felul următor. Fie p_i aplicaţia care pune în corespondenţă fiecărui punct M (din plan). proiecţia sa pe dreapta d_i, adică $p_i(M)$ este piciorul perpendicular eicoborîte din punctul M pe dreapta d_i. Trebuie să se demonstreze că pe dreapta d_1 există un singur punct x_1 astfel încît după n transformări

$$x_1 \xrightarrow{p^n} x_n \xrightarrow{p_{n-1}} x_{n-1} \xrightarrow{p_{n-2}} \ldots \xrightarrow{p_2} x_2 \xrightarrow{p_1} x_1$$

se transformă în el însuşi.

Pentru un punct arbitrar x de pe dreapta d_1, vom nota cu $f(x)$ punctul de pe dreapta d_1 în care trece X după n transformări $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1$ (vezi figura 96): aceasta se va scrie astfel:

$$f = p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n.$$

Vom alege pe fiecare dintre dreptele d_i, o origine şi un sens, adică le transformăm în axe numerice (unitatea de măsură o vom lua pe toate axele aceeaşi). Vom identifica punctul de pe dreaptă şi coordonata sa, aşa că transformările $p_1, p_2, \ldots, p_n$, şi f le putem considera acum funcţii care pun în corespondenţă oricărui număr tot un număr.

Vom demonstra că transformarea f este liniară: $f(x) = ax + b$.

Pentru aceasta, este suficient să demonstrăm următoarele trei afirmaţii, aproape evidente.

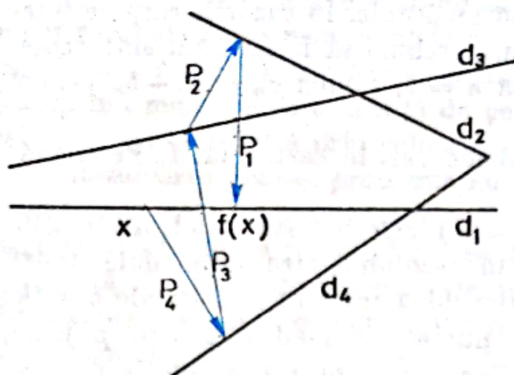


Fig. 96. Transformarea $f: x \to f(x)$ se numește produsul transformărilor p_4, p_3, p_2, p_1.

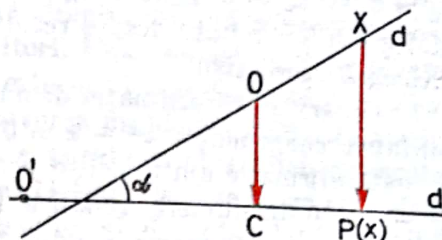


Fig. 97. Transformarea care pune în corespondență fiecărui punct al unei drepte proiecția sa pe altă dreaptă se scrie ca o funcție liniară.

(1) Dacă d și d' sînt două drepte și $p: d \to d'$ este o transformare care pune în corespondență fiecare punct de pe d cu proiecția lui pe d', atunci p este o transformare liniară.

(2) Dacă p_1 și p_2 sînt transformări liniare, atunci $p_1 \circ p_2$ este transformare liniară.

(3) Dacă $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sînt transformări liniare, atunci $f = p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n$ este tot o transformare liniară.

Este evident că (3) se deduce din (2) cu ajutorul inducției. Verificarea lui (2): dacă $p_1(x) = a_1x + b_1$ și $p_2(x) = a_2x + b_2$, atunci $(p_1 \circ p_2)(x) = p_1(p_2(x)) = a_1a_2x + (a_1b_2 + b_1)$. Pentru demonstrația lui (1) ținem cont de formula

$$p(x) = x \cos \alpha + c,$$

unde α este unghiul dintre sensurile pozitive ale axelor Ox și $O'x'$, c este coordonata punctului $p(0)$ în sistemul $O'x'$ (vezi figura 97; examinați și cazul cînd dreptele d și d' sînt paralele).

Acum, pentru rezolvarea problemei este de ajuns să se arate că ecuația liniară $x = ax + b$ are o rădăcină și numai una singură. Dacă nu se întîmplă așa (adică dacă nu are soluții sau sînt mai multe) atunci $a = 1$. Să arătăm că nu poate fi. Observăm că la fiecare proiecție $p_k: d_{k+1} \to d_k$ distanța dintre oricare două puncte nu se mărește:

$$| p_k(x) - p_k(x') | \leqslant | x - x' |$$

și dacă dreptele d_{k+1} și d_k nu sînt paralele, se micșorează strict. De aici rezultă că pentru oricare două puncte x și x',

$$| f(x) - f(x') | < | x - x' |.$$

Dar dacă $a = 1$, adică $f(x) = x + b$, atunci f păstrează distanța dintre oricare două puncte (le translatează cu distanța b). S-a obținut o contradicție. Demonstrația s-a terminat.

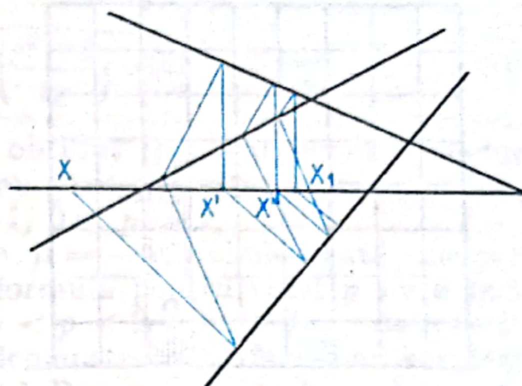


Fig. 98. Punctul x_1, pentru care $f(x_1) = x_1$, practic se poate găsi prin metoda aproximaţiilor succesive: începînd cu un punct oarecare x, ducem perpendiculare pe dreptele date şi găsim succesiv după fiecare „ciclu" punctele $x' = f(x)$, $x'' = f(x')$ ş.a.m.d. Este uşor de demonstrat că distanţele $|x - x_1 \cdot x' - x_1|$, $|x'' - x_1|$, ... formează o progresie geometrică infinit descrescătoare cu raţia $|a| < 1$, aşa încît dacă repetăm construcţia de cîteva ori, putem găsi poziţia punctului x_1 cu o precizie dorită. Această metodă se aplică adesea pentru găsirea rădăcinilor ecuaţiilor de forma $f(x) = x$; se aplică atunci cînd funcţia f micşorează distanţa dintre oricare două puncte. În cazul nostru, cînd funcţia f este liniară, desigur că soluţia ecuaţiei $f(x) = x$ poate fi găsită exact (gîndiţi-vă cum se poate găsi punctul x_1 dacă sînt cunoscute x, x' şi x'').

Problema şi rezolvarea dată se pot transpune şi la cazul cînd dreptele sînt în spaţiu (printre ele pot fi şi drepte oarecare). În acest caz prin p_k vom nota proiecţia pe dreapta d_k din spaţiu, adică transformarea care pune în corespondenţă fiecărui punct piciorul perpendicularei coborîtă din acest punct pe dreapta d_k. Mai este o altă posibilitate de generalizare: să se considere în loc de drepte, plane. Se poate demonstra, de exemplu, următorul fapt: dacă se dau n plane în spaţiu dintre care trei se întîlnesc într-un punct, atunci se poate alege în fiecare plan cîte un punct X_k $(k = 1,2....n)$ astfel încît, perpendiculara dusă în punctul X_k pe planul corespunzător, să treacă prin punctul X_{k+1} (luăm $X_{n+1} = X_1$). Acum $f = p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n$ va fi o transformare liniară a unui plan pe un plan şi într-un sistem de coordonate se va scrie astfel: $f(x, y) = (x', y')$ unde $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$

Să se demonstreze că dacă sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x = a_1x + b_1y + c_1 \\ y = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$$

nu are soluţii sau are mai mult decît una singură (aceasta înseamnă că $(a_1 - 1)(b_2 - 1) - a_2b_1 = 0$), atunci sistemul

$$\begin{cases} x = a_1x + b_1y \\ y = a_2x + b_2y \end{cases}$$

admite o soluţie (x_0, y_0) diferită de $(0, 0)$ şi transformarea f nu modifică distanţa dintre punctele $(0, 0)$ şi (x_0, y_0) ceea ce în problema noastră nu se poate.

M. 71. *Un tablou dreptunghiular format din m linii şi n coloane este completat cu numere. Aranjăm numerele în fiecare linie în ordine crescătoare. Să se demonstreze că; dacă după aceasta, aranjăm numerele în fiecare coloană în ordine crescătoare, atunci în fiecare linie ele rămîn tot în ordine crescătoare.*

Să se stabilească ce se va întîmpla dacă se procedează în ordine inversă: în tabloul iniţial, la început aranjăm numerele din fiecare coloană în ordine crescătoare, iar apoi în fiecare linie; se obţine ca rezultat acelaşi tablou ca şi în primul caz sau altul?

Să considerăm tabloul în care pe fiecare linie numerele sînt aranjate în ordine crescătoare şi să demonstrăm că dacă $l < r$, atunci cel mai mare număr de pe coloana r (să-l notăm b) nu e mai mic decît cel mai mare număr

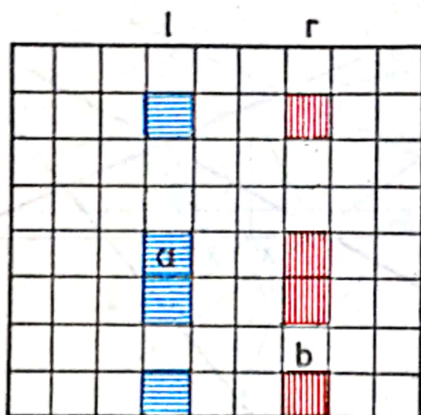


Fig. 99. Dacă numerele din căsuțele albastre nu sînt mai mici decît *a*, atunci numerele din căsuțele roșii, de asemenea nu sînt mai mici decît *a*.

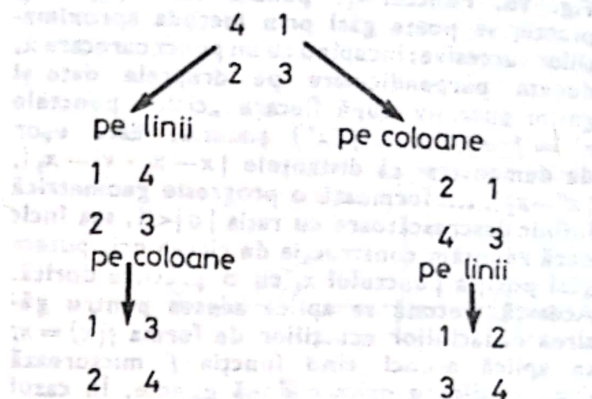


Fig. 100

de pe coloana l (să-l notăm a). Într-adevăr, numărul situat la intersecția liniei pe care este situat a, cu coloana r nu este mai mic decît a (deoarece pe linie numerele merg în ordine crescătoare).

Analog se poate demonstra că al k-lea număr (considerat de la cel mai mare) din coloana r să-l notăm b_k nu este mai mic decît al k-lea număr după mărime de pe coloana l, să-l notăm a_k. Într-adevăr (vezi figura 99) în coloana l sînt k numere nu mai mici decît a_k, prin urmare, în liniile corespunzătoare din coloana r se găsesc k numere nu mai mici decît a_k, deci $b_k \geqslant a_k$. De aici rezultă că dacă aranjăm numerele pe coloane în ordine crescătoare, atunci al k-lea număr din coloana r nu va fi mai mic decît al k-lea număr din coloana l pentru orice $l < r$, adică în linia k numerele sînt în ordine crescătoare. Cerința problemei este demonstrată.

În funcție de cum aranjăm numerele (la început pe coloane sau la început pe linii) se pot obține tablouri diferite. Pentru ca să ne convingem de acest lucru, este suficient să urmărim exemplul din figura 100.

N.B. Vasiliev

M 72 *Să se rezolve ecuația*

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = p \qquad (1)$$

unde p este un număr real arbitrar.

Iu. I. Ionin

O încercare naivă de rezolvare: ridicăm ambele părți ale ecuației (1) la cub:

$$2 + 3\sqrt[3]{1-x^2}\,(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}) = p^3 \qquad (2)$$

și înlocuim aici din egalitatea inițială (1), și obținem:

$$2 + 3p\sqrt[3]{1-x^2} = p^3. \qquad (3)$$

De aici se găsește ușor x:

$$x = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{p^3-2}{3p}\right)^3}. \qquad (4)$$

S-au primit multe rezolvări în care s-a obținut (așa sau în alte moduri) acest răspuns. Au fost și rezolvitori care au găsit și mulțimea valorilor lui p, pentru care formula (4) are sens: $p = -1$, $0 < p \leqslant 2$.

Unii au observat chiar că valoarea $p = -1$ trebuie dată deoparte fiindcă valoarea $x = 0$ dată de această formulă pentru acest p nu e bună. Dar nu s-a demonstrat că pentru toți p, $0 < p \leqslant 2$ valorile lui x date de formula (4) sînt soluții. (De obicei această demonstrație se face prin verificare, dar aici aceasta se face foarte complicat.) Dar aceasta trebuie demonstrat căci nu toate transformările efectuate mai sus păstrează echivalența: ecuația (2) nu este echivalentă cu (3). Pentru ca să ne convingem de acest lucru să înlocuim $x = 0$, $p = -1$ în (2) și (3). Egalitatea (3) se transformă într-o identitate dar (2) nu. (Încercați ca din (3) să deduceți pe (2). Trebuie să folosiți egalitatea (1) dar acest lucru nu e permis căci tocmai aceasta trebuie cercetată.) Aceasta și alte rădăcini pot să fie străine.

Să analizăm mai amănunțit transformările pe care le efectuăm asupra ecuației. Să notăm pentru ușurință $\sqrt[3]{1-x} = u$ și $\sqrt[3]{1+x} = v$.

De la ecuația $u + v = p$ am trecut la ecuația $u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = p^3$ (2) cu ajutorul unei transformări echivalente (ridicarea ambelor părți la cub). Pasul următor pe care îl facem, este să înlocuim pe p în locul lui $u + v$ și să trecem la ecuația

$$u^3 + v^3 + 3uvp = p^3 \qquad (3)$$

pe care o transcriem astfel:

$$u^3 + v^3 - p^3 + 3uvp = 0$$

$$(u+v)^3 - p^3 - 3uvp(u + v - p) = 0.$$

Vom aplica formula diferenței cuburilor și apoi vom scoate în factor $(u + v - p)$:

$$(u + v - p)(u^2 + v^2 + p^2 + up + pv - uv) = 0. \qquad (3')$$

Astfel am reușit să scriem ecuația (3) în forma (3′) pe care este ușor să se cerceteze de ce nu e echivalentă cu (2). Evident că partea stîngă a ecuației (3′) este egală cu zero, cînd cel puțin una dintre paranteze este egală cu zero:

$$1) \quad u + v - p = 0,$$

$$2) \quad u^2 + v^2 + p^2 + up + pv - uv = 0.$$

Prima egalitate este ecuația noastră inițială. Înseamnă că toate soluțiile străine sînt date de-a doua și trebuie văzut care sînt rădăcinile ei. Amplificînd-o cu 2, ea poate fi scrisă astfel:

$$(u+v)^2 + (v+p)^2 + (u-v)^2 = 0.$$

Această egalitate este satisfăcută numai pentru $u = v = -p$.

Revenind la ecuația noastră,

$$\sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{1+x} = -p.$$

Înseamnă că $x = 0$ pentru $p = -1$ este singura rădăcină străină. Toate celelalte rădăcini date de formula (4) pentru $0 < p \leqslant 2$ satisfac ecuația (1).

Mai scriem o dată identitățile care le-am stabilit pe parcurs: (pentru simetria scrierii vom înlocui pe p cu $-w$):

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - ue - vw - uv),$$

$$2(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - uw) = (u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2.$$

Ele se dovedesc adesea utile pentru justificarea unor inegalități în alte probleme.

M 73. *Pe un bilet de loterie trebuie marcate 8 căsuțe din 64. Care e probabilitatea ca după tragere, la care de asemenea se aleg 8 căsuțe din cele 64 (toate posibilitățile le considerăm egal probabile) să se vadă că s-au ghicit 4 căsuțe? 5 căsuțe?... toate cele 8 căsuțe?*

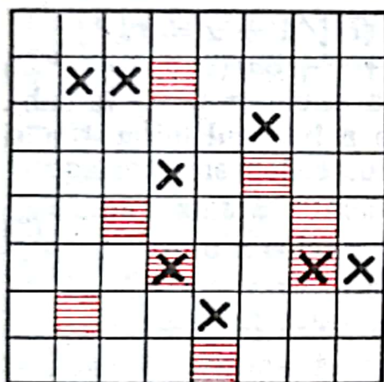


Fig. 101. Căsuțele hașurate sînt cîștigătoare; căsuțele alese de noi le-am marcat cu o cruce. Pe desen $k = 2$, $8 - k = 6$.

După cum se știe, 8 căsuțe din 64 pot fi alese în $C_{64}^8 = \frac{64!}{8!56!}$ moduri. Toate aceste moduri sînt egal probabile. Prin urmare, probabilitatea de a nimeri un anumit mod este $1/C_{64}^8$. Acum trebuie socotit în cîte cazuri vor fi ghicite exact k căsuțe $(0 \leqslant k \leqslant 8)$. Numărul acestor cazuri va fi egal cu numărul modurilor în care se aleg k căsuțe din cele 8 trase cu $8 - k$ căsuțe din cele 56 netrase. De aceea el este egal cu $C_8^k \cdot C_{56}^{8-k}$. Pentru a găsi probabilitatea căutată f_k de a ghici exact k căsuțe, trebuie să se înmulțească probabilitatea unui mod cu acest număr. Vom obține

$$f_k = \frac{C_8^k \cdot C_{56}^{8-k}}{C_{64}^8}.$$

Astfel, probabilitățile de a ghici 0, 1, 2, ..., 8 căsuțe sînt egale respectiv cu:

$$f_0 = \frac{C_8^0 \cdot C_{56}^8}{C_{64}^8}; \quad f_1 = \frac{C_8^1 \cdot C_{56}^7}{C_{64}^8}; \ldots . f_8 = \frac{C_8^8 \cdot C_{56}^0}{C_{64}^8}. \qquad (1)$$

Suma acestor nouă numere este 1.

Formal problema este rezolvată dar din punct de vedere practic acesta nu este încă un răspuns. Am dori să ne dăm seama cît de mari sînt șansele să ghicim un anumit număr de căsuțe dacă cumpărăm și completăm, să zicem, 10 bilete de loterie. Pentru aceasta trebuie să ne reprezentăm aproximativ aceste numere sub formă de fracții zecimale. La început vom calcula raportul dintre al $k + 1$-lea dintre aceste numere și al k-lea:

$$\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{C_8^{k+1} \cdot C_{56}^{8-k+1}}{C_{64}^8} : \frac{C_8^k \cdot C_{56}^{8-k}}{C_{64}^8} = \frac{(8-k)^2}{(k+1)(48+k+1)}$$

în particular

$$\frac{f_1}{f_0}=\frac{64}{49}\approx 1{,}31;\quad \frac{f_2}{f_1}=\frac{49}{100};\quad \frac{f_3}{f_2}=\frac{12}{51}\approx 0{,}235;\quad \frac{f_4}{f_3}=\frac{25}{208}\approx 0{,}12;\quad \frac{f_5}{f_4}\approx 0{,}06.$$

Să calculăm rapoartele lui f_2, f_3, f_4 la f_0 cu două zecimale

$$\frac{f_2}{f_0}=0{,}64,\quad \frac{f_3}{f_0}\approx 0{,}15;\quad \frac{f_4}{f_0}=0{,}02.$$

Este clar că $f_5/f_0 < 0{,}02\cdot 0{,}12$ şi pentru gradul de aproximaţie ales f_5, f_6, f_7, f_8 sînt egale cu zero. Putem face ecuaţia

$f_0(1+1{,}31+0{,}64+0{,}15+0{,}02)=1$, de unde $f_0\approx 0{,}32$. Acum vom găsi pe f_1, f_2, f_3, f_4:

$f_1\approx f_0\cdot 1{,}31\approx 0{,}42$; $f_2\approx f_0\cdot 0{,}64\approx 0{,}20$, $f_3\approx f_2\cdot 0{,}24\approx 0{,}047$; $f_4\approx f_3\cdot 0{,}12\approx$ $\approx 0{,}0056$.

Astfel, dacă cumpărăm 10 bilete printre ele mai curînd vor fi de acelea pe care s-au ghicit 0, 1, 2 şi poate 3 căsuţe; probabilitatea de a ghici 4 căsuţe este foarte mică. Înmulţind pe f_4 cu $f_5/f_4\approx 0{,}06$ ş.a.m.d. se pot obţine valorile aproximative ale lui f_5, f_6, f_7, f_8. În particular $f_8=2\cdot 10^{-10}$. Aceasta înseamnă că pentru a avea şanse reale de a ghici toate cele 8 căsuţe trebuie completate cîteva miliarde de bilete.

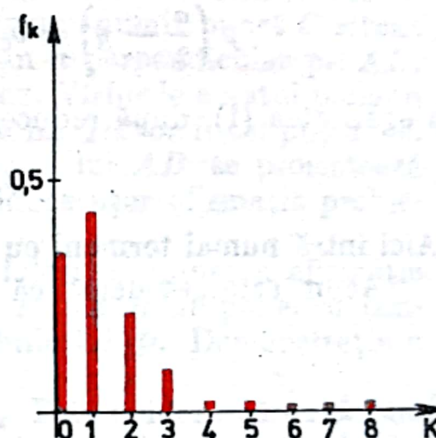


Fig. 102. Aici sînt prezentate numerele f_k-probabilităţile de a ghici k căsuţe ($k = 0,1 \dots 8$). Pentru $k\geqslant 4$ mărimea f_n este foarte apropiată de zero.

Cu ajutorul unei metode aproximative de calcul pe care am aplicat-o se poate arăta că dacă numărul N al căsuţelor de pe bilet este mult mai mare decît numărul m al căsuţelor care trebuie alese şi m este destul de mare, atunci probabilitatea de a ghici k căsuţe este aproximativ egală c

$$f_k=\frac{C_m^k\cdot C_{N-m}^{m-k}}{C_N^m}\approx\frac{\mu^k\cdot e^{-\mu}}{k!}$$

unde $\mu = m^2/(N-2m)$ şi $e\approx 2{,}718\dots$

A.L. Toom

M 74. *Un polinom p are următoarea proprietate: pentru un anumit număr a:*

$$p(x)=p(a-x).$$

Să se demonstreze că $p(x)$ poate fi pus sub forma unui polinom de $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$. De exemplu dacă $p(x)=x^5+(1-x)^5$, atunci, evident că $p(x)=$ $=p(1-x)$ şi, după cum se poate verifica uşor,

$$p(x)=5y^2+\frac{5}{2}y+\frac{1}{16},$$

unde

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Vom exprima pe x printr-o nouă variabilă $y = x - \frac{a}{2}$. Atunci $x = \frac{a}{2} + y$, $a - x = \frac{v}{2} - y$. Dacă în polinomul $p(x)$ în locul lui x punem $\frac{a}{2} + y$, atunci se obţine un polinom de variabila $y : p\left(\frac{a}{2} + y\right)$ care va satisface condiţia

$$p\left(\frac{a}{2} + y\right) = p\left(\frac{a}{2} - y\right). \qquad (1)$$

Fie

$$p\left(\frac{a}{2} + y\right) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots + b_n y^n. \qquad (2)$$

Atunci

$$p\left(\frac{a}{2} - y\right) = b_0 - b_1 y + b_2 y^2 - b_3 y^3 + \ldots + b_n y^n$$

şi egalitatea (1), după reduceri, ia aspectul:

$$b_1 y + b_3 y^3 + \ldots = 0. \qquad (3)$$

(Aici intră numai termeni cu y la exponent impar.)

Acum este „evident" că

$$b_1 = b_3 = \ldots = 0, \qquad (4)$$

de unde

$$p\left(\frac{a}{2} + y\right) = b_0 + b_2 y^2 + b_4 y^4 + \ldots,$$

$p\left(\frac{a}{2} + y\right)$ apare ca un polinom de y^2 adică $p(x)$ apare ca un polinom de $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$ (Vă sfătuim să faceţi toate aceste transformări asupra polinomului $x^5 + (1 - x)^5$ dat în textul problemei.)

Dacă dorim să asigurăm rigoarea matematică a rezolvării, trebuie să lămurim de ce este „evident " că din (3) rezultă (4).

Pentru aceasta trebuie să precizăm cum înţelegem egalitatea a două polinoame, de exemplu, egalitatea (3) sau (2) sau (1) sau cea din textul problemei.

De obicei, în şcoală, o astfel de egalitate se înţelege ca o egalitate de funcţii, adică egalitatea celor doi membri pentru orice valori date variabilei. Atunci pentru trecerea de la (3) la (4) trebuie să ne referim la teorema despre polinomul identic nul: dacă $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n = 0$ pentru toate valorile reale ale lui x, atunci $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Remarcăm că în majoritatea manualelor de algebră modernă, de obicei se înţelege egalitatea polinoamelor ca egalitatea coeficienţilor corespunzători (după aducerea lor la forma standard $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$). Dacă toate egalităţile din problema noastră se înţeleg astfel, atunci la trecerea de la (3) la (4) cuvîntul „evident" trebuie înlocuit cu „după definiţie".

A.L. Toom

M 75. *a) Să se demonstreze că în orice poliedru convex, suma lungimilor tuturor muchiilor este mai mare decît întreitul diametrului său. (Diametrul unui poliedru este cea mai mare dintre lungimile tuturor segmentelor posibile cu extremităţile în vîrfurile poliedrului.)*

b) Să se demonstreze că pentru orice două vîrfuri A şi B ale unui poliedru convex, se găsesc trei linii frînte formate din muchii ale poliedrului, unind punctele A şi B astfel încît oricare două nu trec prin aceeaşi muchie.

c) Să se demonstreze că dacă într-un poliedru convex se taie două muchii, atunci pentru orice două vîrfuri ale sale A şi B se găseşte o linie frîntă care uneşte pe A cu B trecînd prin celelalte muchii.

d) Să se demonstreze că în problema b) se pot alege trei linii frînte care să nu aibă două cîte două vîrfuri comune afară de A şi B.

A.G. Kuşnirenko

Evident că din problema d) rezultă problema b) din b) rezultă c) şi a).

a) Fie AB diametrul poliedrului P. Proiectăm toate muchiile lui P pe AB. Să examinăm cîte puncte se proiectează într-un anumit punct C situat în interiorul lui AB. Dacă prin C se duce un plan π perpendicular pe AB, atunci π intersectează pe P după un poligon convex. Vîrfurile acestui poligon vor fi punctele de intersecţie a lui π cu muchiile lui P (vor fi cel puţin trei vîrfuri) şi înseamnă că în fiecare punct interior al lui AB se proiectează cel puţin trei de pe muchiile lui P. De aici se deduce uşor afirmaţia problemei a).

Pentru rezolvarea problemelor c) şi d) vom folosi următoarea afirmaţie evidentă intuitiv: Pentru orice două vîrfuri A şi B ale unui poliedru convex P, există un drum de la A la B prin muchiile lui P. Demonstraţia o lăsăm cititorului.

c) Presupunem că s-au tăiat muchiile r_1 şi r_2. Este evident că există un drum L_1 care uneşte capetele lui r_1 şi care nu trece prin r_2. Într-adevăr, muchia r_1 este formată de două feţe. Muchia r_2 nu este situată cel puţin într-una dintre aceste două feţe, de aceea L_1 poate fi luat conturul acestei feţe. Analog pentru r_2 există un drum L_2. Să considerăm acum două vîrfuri arbitrare A şi B. Înlocuind în drumul L care merge de la A la B (care există, după cele spuse mai sus) muchia r_1 cu drumul L_1 şi muchia r_2 cu drumul L_2 (desigur, numai dacă aceste muchii se găsesc în drumul L) vom obţine drumul cerut, după celelalte muchii. Remarcăm că acest drum poate să aibă autointersecţii care, dealtfel, nu sînt greu de eliminat.

d) Cum s-a arătat mai sus, pentru orice două vîrfuri A şi B ale unui poliedru convex, se găseşte un drum care merge de la A la B prin muchiile sale. Numim lungime a unui astfel de drum, numărul muchiilor din care este format şi vom numi distanţa de la A la B — o vom nota $d(A, B)$ — lungimea celui mai scurt (după numărul muchiilor) drum. Pentru demonstraţia cerinţei problemei, vom fixa punctul A şi vom face o inducţie după distanţa dintre A şi B. Dacă $d(A, B) = 1$, atunci A şi B sînt situate pe aceeaşi muchie şi afirmaţia este evidentă, fiindcă se poate merge de la A la B pe muchia AB şi pe contururile celor două feţe care determină pe AB. Să presupunem că afirmaţia este demonstrată pentru toate vîrfurile aflate la distanţa $n - 1$ de A. Fie $d(A, B) = n$. Atunci există un vîrf B' astfel încît $d(A, B') = n-1$ şi $d(B', B) = 1$. Să considerăm toate feţele care-l conţin pe B: Mulţimea tuturor muchiilor care aparţin acestor feţe constă din „raze" (muchii cu un vîrf în B') şi „inel" (format din restul muchiilor). Unul dintre vîrfurile inelului este punctul B. După presupunerea de inducţie există trei drumuri l_1, l_2, l_3 de la A la B' care nu au două cîte două puncte comune cu excepţia capetelor.

Evident că fiecare dintre aceste trei drumuri trece cel puţin printr-unul dintre vîrfurile inelului. Aceste vîrfuri ale inelului le vom numi ocupate. Ne vom deplasa acum de la punctul B după inel într-o direcţie pînă cînd ajungem la primul punct ocupat şi apoi în cealaltă direcţie. Să considerăm cele două vîrfuri ocupate obţinute A_1 şi A_2 (unul dintre ele poate fi vîrful B). Sînt posibile două cazuri.

Cazul 1. Vîrfurile ocupate A_1 şi A_2 aparţin unor drumuri diferite, să zicem l_1 şi l_2. Atunci vom construi trei drumuri de la A la B în felul următor. Primul drum de la A la A_1 după l_1 apoi de la A_1 la B după inel (observăm că prin alegerea punctului A_1 pe ultima parte nu ne-am intersectat cu drumurile l_3 şi l_2). Al doilea drum: de la A la A_2 după l_2, apoi de la A_2 la B după inel. Al treilea drum: de la A la B' după l_3, apoi după muchia BB'. Evident că cele trei drumuri construite nu au două cîte două puncte comune, afară de capete.

Cazul 2. Vîrfurile ocupate A_1 şi A_2 aparţin aceluiaşi drum, să zicem l_2. Vom vedea atunci care dintre aceste vîrfuri se întîlneşte primul în deplasarea de la A la B' după l_1 şi vom lua porţiunea l'_1 a drumului l_1 de la A pînă la primul dintre aceste vîrfuri. După aceasta considerăm cele trei drumuri l'_1, l_2, l_3 considerăm mulţimea vîrfurilor inelului ocupate de drumurile l'_1, l_2, l_3, şi facem din nou raţionamentul precedent relativ la aceste trei drumuri. Dacă dăm peste cazul 1, atunci construim cele trei drumuri prin procedeul descris mai sus, dacă din nou dăm peste cazul 2, atunci vom considera un nou triplet de drumuri l''_1, l_2, l_3. Dacă şi pentru acest triplet apare cazul 2, atunci mai considerăm un nou triplet ş.a.m.d. Întrucît în modul acesta avansăm pe inel tot mai departe şi pe inel sînt vîrfuri care aparţin drumurilor l_2 şi l_3, atunci după un număr de paşi obţinem cazul 1, şi drumurile cerute de la A la B vor fi construite. Problema d) este rezolvată. Este adevărată o afirmaţie mai puternică: Pentru orice două vîrfuri A şi B se pot găsi trei lanţuri de feţe, care nu au feţe comune, astfel încît prima faţă conţine vîrful A, ultima vîrful B şi feţele vecine au o muchie comună.

A.G. Kuşnirenko

M 76. *Într-o societate formată din n persoane, oricare două persoane care nu se cunosc între ele au exact cîte două cunoştinţe comune, iar oricare două persoane care se cunosc nu au alte cunoştinţe comune. Să se demonstreze că în această societate fiecare persoană se cunoaşte cu acelaşi număr de oameni.*

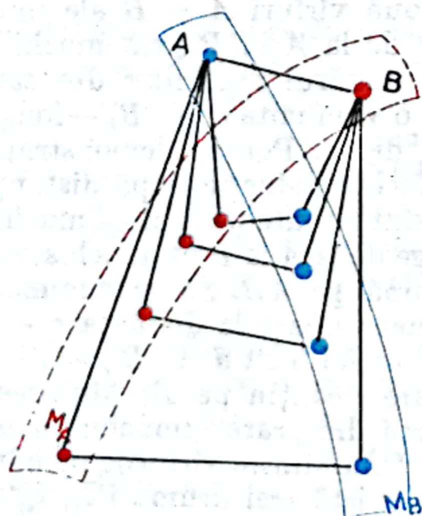


Fig. 103

Pentru fiecare persoană X, vom nota prin m_X numărul cunoştinţelor sale.

Fie A şi B două persoane care se cunosc între ele (fig. 103). Vom nota prin M_A mulţimea cunoştinţelor lui A şi prin M_B, mulţimea cunoştinţelor lui B. Vom demonstra că:

(1) M_A şi M_B nu au elemente comune.

(2) fiecare persoană din M_A are exact o cunoştinţă în M_B şi

(3) fiecare persoană din $M_{B'}$ are exact o cunoştinţă în M_A.

Afirmaţia (1) rezultă direct din ipoteza problemei: A şi B nu pot să aibă cunoştinţe comune. Demonstrăm pe (2); (3) se demonstrează analog. Fie $X \in M_A$ (această

scriere înseamnă „X aparţine mulţimii M_A"). Fie X este B şi atunci conform lui (1) el are în M_B numai o cunoştinţă, chiar pe A, fie $X \neq B$ şi atunci conform lui (1), X nu se cunoaşte cu B, şi deci X şi B, trebuie să aibă în afară de A încă o singură cunoştinţă comună, adică X are exact o cunoştinţă în M_B, ceea ce trebuia demonstrat. Din (2) şi (3) rezultă că între mulţimile M_A şi M_B poate fi stabilită o corespondenţă biunivocă, de aceea $m_A = m_B$.

Astfel, dacă A şi B se cunosc între ele, atunci $m_A = m_B$. Dacă însă A şi B nu se cunosc, atunci ele au o cunoştinţă C şi deci $m_A = m_B = m_C$.

Mulţi cititori au rezolvat problema altfel. Pentru fiecare persoană fie M_A mulţimea tuturor cunoştinţelor sale şi N_A mulţimea celor ce nu se cunosc cu A. Atunci, fiecărui element din N_A i se poate pune în corespondenţă o pereche de elemente din M_A (acele cu care el se cunoaşte) şi nu e greu de demonstrat că această corespondenţă dintre mulţimea N_A şi mulţimea tuturor perechilor posibile din M_A va fi biunivocă. Prin urmare dacă M_A va conţine m_A elemente, atunci în N_A vor fi $m_A(m_A - 1)/2$ elemente şi în total în societate vor fi $n = 1 + m_A + m_A\,(m_A - 1)/2$ persoane. Această egalitate este valabilă pentru orice persoană A. Dar ecuaţia

$$n = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2}$$

are (pentru $n > 1$) numai o rădăcină pozitivă, prin urmare m_A este unul şi acelaşi pentru toţi A.

Este interesant de stabilit pentru ce n, astfel de societăţi există în realitate. Răspunsul complet la această chestiune nu îl ştim. Am văzut că $n = 1 + m(m + 1)/2$ unde m este numărul cunoştinţelor unei persoane dar nu pentru orice astfel de n există societatea respectivă. De exemplu, nu e greu de demonstrat că nu există pentru $m = 3$, $m = 4$ şi în general pentru $m = 4k + 3$. În afară de cazurile evidente, $m = 1$, $n = 2$ şi $m = 2$, $n = 4$ mai cunoaştem numai unul. El este reprezentat în figura 104 şi într-un alt mod în figura 105. Aici $m = 5$, $n = 16$.

Această configuraţie din 16 puncte şi 40 de segmente poate fi descrisă astfel: mulţimea muchiilor, vîrfurilor şi diagonalelor mari ale unui cub cvadridimensional. Să se demonstreze că există 1920 de moduri de a se transforma în ea însăşi, astfel încît punctele să treacă în puncte şi segmentele în segmente.

N.V. Vasiliev

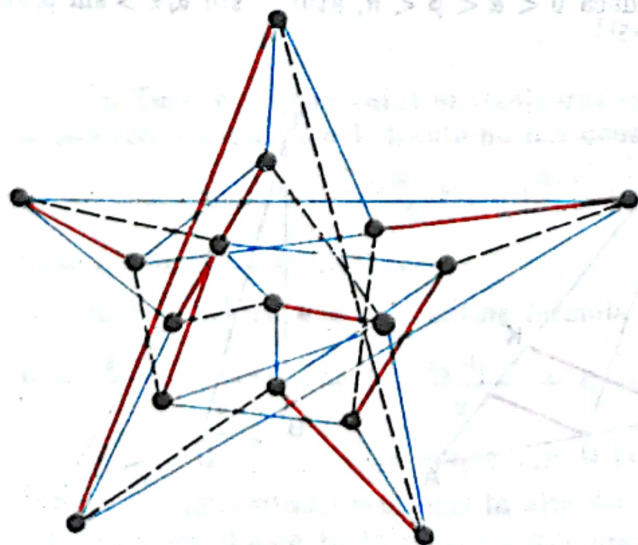


Fig. 104

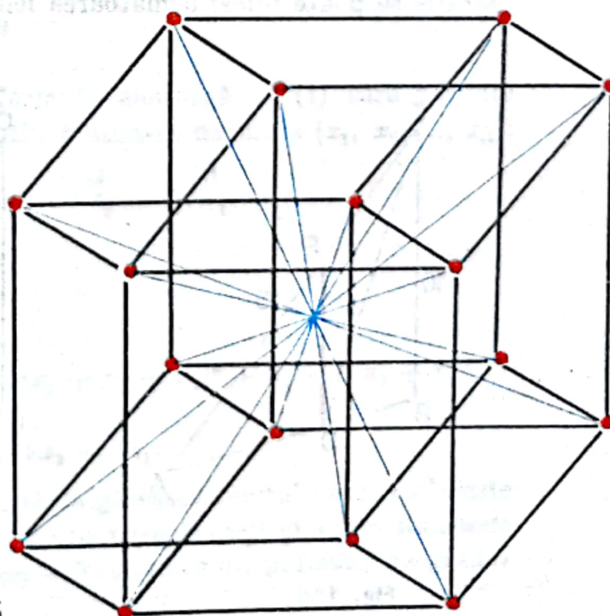


Fig. 105

M 77. *Lungimile a două laturi ale unui triunghi sînt de 10 şi 15. Să se demonstreze că bisectoarea unghiului dintre ele nu e mai mare decît 12.*

N.B. Vasiliev

Vom prezenta numai trei rezolvări din multele primite.

I. Ducem $DE \parallel BC$ (figura 106). Atunci triunghiul CDE este isoscel, de aceea $CE = ED = x$, iar x se poate găsi din asemănarea triunghiurilor ABC şi ADE; $\frac{15-x}{15} = \frac{x}{10}$, deci $x = 6$ şi $CD < CE + ED = 2x = 12$.

II. După proprietatea bisectoarei $BD/DA = BC/CA = 2/3$. Ducem $BK \perp CD$ pînă la intersecţia cu latura AC (fig. 107) şi $DL \perp CD$. Atunci $AK = AC - KC = AC - BC = 5$, dar $KL/LA = BD/DA = 2/3$, de unde $KL = 2$ şi $CD < CL = 12$.

III. Prin metoda ariilor. Fie $\angle BCD = \angle ACD = \alpha$, atunci (fig. 108) $S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow al \sin\alpha + bl \sin\alpha = ab \sin 2\alpha$, deci

$$l = \frac{2ab}{a+b} \cos\alpha = \frac{2\cdot 10\cdot 15}{25} \cos\alpha = 12 \cos\alpha < 12.$$

Mulţi rezolvitori au folosit şi alte formule pentru lungimea bisectoarei:

$$l^2 = ab - mn = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = \frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}.$$

Prin oricare dintre aceste moduri se poate demonstra că bisectoarea l a triunghiului nu depăşeşte valoarea $2ab/(a+b)$ („media armonică a lungimilor a şi b ale laturilor). Această evaluare nu mai poate fi îmbunătăţită: pentru orice $l < 2ab/(a+b)$ se poate construi un triunghi cu laturile a şi b şi bisectoarea l dintre ele (convingeţi-vă de acest lucru!).

Încercaţi să demonstraţi următoarele două afirmaţii care generalizează problema:

1) Dacă în triunghiul ABC, în care $BC = a$, $AC = b$, punctul D împarte latura AB în raportul $BD : DA = m : n$, atunci $|mb - na|/(m+n) < CD < mb + na/(m+n)$. (În problema noastră $m : n = a : b$.)

2) Dacă segmentul CD împarte unghiul BCA în raportul $\angle BCD : \angle DCA = p : q$ atunci $CD < (p+q)ab/(pa+qb)$ (în problema noastră $p : q = 1$; pentru demonstraţie se poate folosi următoarea lemă: dacă $0 < \alpha < \beta < \pi$, atunci $\sin\alpha/\alpha > \sin\beta/\beta$).

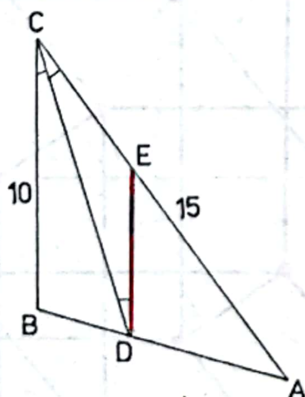


Fig. 106

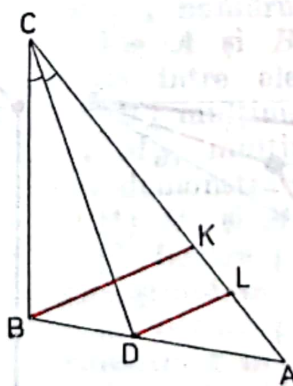


Fig. 107

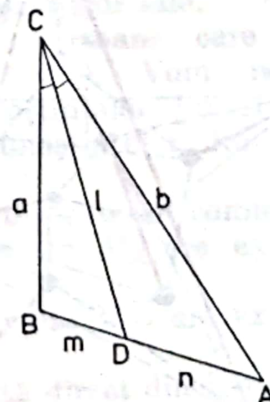


Fig. 108

M 78. *Să se demonstreze că orice număr natural poate fi pus sub forma* $\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}$ *unde x şi y sînt numere naturale şi această reprezentare este unică.*

Vom nota suma $x+y$ prin s şi vom transcrie formula dată astfel:

$$n = \frac{(x+y)^2+3x+y}{2} = \frac{s^2+s}{2} + x. \qquad (1)$$

Condiţia că x şi y sînt numere naturale este echivalentă cu $x \geqslant 0$ şi $s \geqslant x$, x şi s numere naturale. Pentru un s dat, mărimea x poate să ia valorile: $0, 1, \dots, s$; în mod corespunzător, mărimea n determinată de formula (1) ia valorile: $\frac{s^2+s}{2}$, $\frac{s^2+s}{2}+1, \dots, \frac{s^2+s}{s}+s$. Astfel, fiecărui $s = 0, 1, 2, \dots$ îi corespunde un segment format din $s+1$ numere naturale n. Să observăm că ultimul număr al segmentului corespunzător lui s este cu unu mai mic decît primul număr al segmentului corespunzător lui $s+1$: $\left(\frac{s^2+s}{2}+1+s\right) = \frac{(s+1)^2+(s+1)}{2}$. De aceea, aceste segmente vor conţine toate numerele naturale n şi fiecare n va intra numai într-un segment, adică lui îi va corespunde o singură pereche de valori s şi x.

Problema este rezolvată. Am demonstrat că formula (1) permite să se „numeroteze“ toate punctele (x, y) cu coordonate naturale, cu numerele $n = 0, 1, 2, \dots$ În figura 109 se arată cum sînt aranjate aceste numere în ordine

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
s	0	1			2			3		
x	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
y	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0

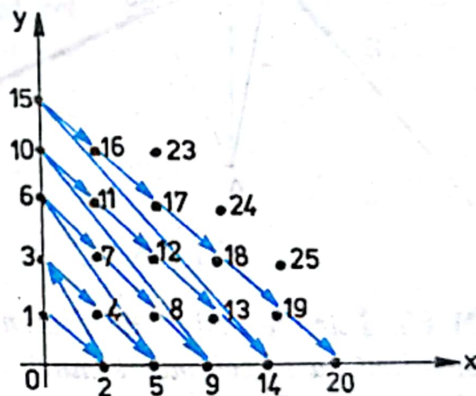


Fig. 109

E. Turkevici a prezentat în rezolvarea sa o formulă analoagă cu (1) care permite să se numeroteze grupurile făcute nu din două ci din k numere naturale $(x_1, x_2, \dots, x_k)$:

$$n = C^k_{s_k+k-1} + C^{k-1}_{s_{k-1}+k-2} + \dots + C^2_{s_2+1} + C^1_{s_1},$$

unde $s_i = x_1 + x_2 + \dots + x_i$.

De exemplu pentru $k = 3$ se obţine formula

$$n = \frac{s_3(s_3+1)(s_3+2)}{6} + \frac{s_2(s_2+1)}{2} + s_1 = \frac{1}{6}\ (x_1+x_2+x_3)^3 + 3(x_1+x_2+x_3)^2 + 3(x_1+x_2)^2 + 11x_1 + 5x_2 + 2x_3.$$

Încercaţi să generalizaţi problema în altă direcţie: să se găsească formula care stabileşte corespondenţa dintre toate punctele din plan cu coordonate întregi şi toate numerele întregi (sau întregi nenegative) n. Se poate scrie această formulă ca un polinom de gradul al doilea $n = f(x, y)$ ca formula (1)?

M 79. *Două puncte P şi Q se mişcă pe două drepte concurente, cu aceeaşi viteză constantă v. Să se demonstreze că în plan există un punct fix A astfel încît, în orice moment, distanţele sale la punctele P şi Q să fie egale.*

I.F. Şarîghin

Fie O punctul de intersecţie a dreptelor date: P_0 şi Q_0 poziţiile punctelor în momentul t_0 în care ele se află la distanţe egale de O (t_0 este media aritmetică a valorilor respective ale lui t în care cele două puncte au trecut prin O); A punctul de intersecţie a perpendicularelor pe dreptele date, ridicate respectiv în punctele P_0 şi Q_0. Vom demonstra că punctul A este acel punct fix cerut de problemă.

Cazul particular în care P_0, Q_0 (şi A) coincid cu O, este evident. În cazul general (figura 110) este clar că triunghiurile AP_0O şi AQ_0O sînt congruente, de aceea $AP_0 = AQ_0$. Fie P şi Q poziţiile punctului într-un moment arbitrar t (diferit de t_0). Atunci $PP_0 = QQ_0$ (punctele se mişcă cu aceeaşi viteză), triunghiurile PP_0A şi QQ_0A sînt congruente după cele două catete, deci $AP = AQ$.

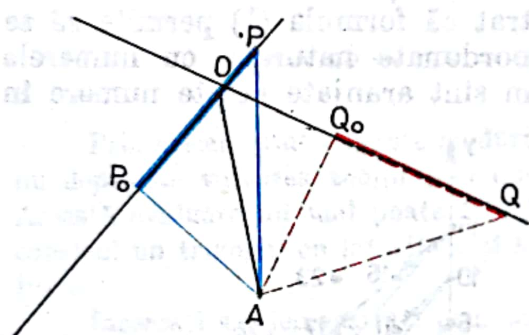


Fig. 110

Din rezolvarea dată rezultă că este adevărată o afirmaţie mai tare decît egalitatea distanţelor de la punctul A la respectivele puncte P şi Q: dacă se roteşte una dintre dreptele date în jurul punctului A (cu unghiul P_0AQ_0), astfel încît ea să coincidă cu cealaltă, atunci în orice moment punctul P coincide cu punctul Q.

M 80. *Într-un tablou de dimensiuni $m \times n$ sînt scrise numere arbitrare. Se stabileşte să se schimbe semnele tuturor numerelor de pe o coloană sau de pe o linie. Să se demonstreze că repetînd această operaţie de mai multe ori, se poate obţine un tablou în care suma numerelor din orice coloană şi suma numerelor de pe orice linie vor fi nenegative.*

A.S. Şvarţ

Vom schimba semnele numerelor de pe liniile şi coloanele în care suma numerelor este negativă. La fiecare astfel de schimbare a semnelor, suma tuturor numerelor din tablou se măreşte. Prin urmare nu se poate obţine unul şi acelaşi tablou de două ori. Dar în total numărul tablourilor diferite care se pot obţine dintr-un tablou dat, prin schimbarea semnelor în liniile şi coloanele sale, este finit (şi anume 2^{m+n}). De aceea, după un număr oarecare de paşi, ajungem la un tablou căruia nu i se mai poate face operaţia indicată, adică în care suma numerelor de pe fiecare coloană şi de pe fiecare linie este nenegativă. Se poate demonstra că pentru un tablou $m \times n$, nu sînt necesare mai mult de $\frac{m+n}{2}$ operaţii.

M 81. *În interiorul unui pătrat $A_1A_2A_3A_4$ se ia un punct arbitrar P. Din vîrful A_1 se duce o perpendiculară pe dreapta A_2P, din A_2 una pe A_3P, din A_3 pe A_4P, din A_4 pe A_1P. Să se demonstreze că toate aceste patru perpendiculare (sau prelungirile lor) sînt concurente.*

A.N. Vilenkin

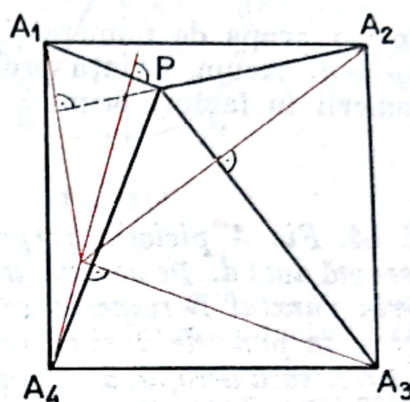


Fig. 111

Vom roti pătratul (vezi figura 111) în jurul centrului său cu 90°, astfel încît vîrful A_2 să treacă în A_1, A_3 în A_2, A_4 în A_3 și A_1 în A_4. Atunci fiecare dintre dreptele A_2P, A_3P, A_4P, A_1P trece în perpendiculara respectivă (căci se rotește cu 90°!), deci e evident că cele patru perpendiculare vor trece prin punctul P', imaginea punctului P prin rotația făcută.

M 82. *Pe o pistă de automobile circulară, staționează (în puncte diferite) cîteva mașini identice. Se știe că dacă toată benzina de care dispun, s-ar turna într-o singură mașină, atunci aceasta ar putea să parcurgă toată pista și să se ajungă în locul de plecare. Să se demonstreze că cel puțin una dintre mașinile aflate pe pistă poate să parcurgă întregul drum, luînd pe drum benzină de la celelalte mașini.*

Rezolvarea cea mai directă se face prin inducție după numărul mașinilor. Cazul $n = 1$ este evident. Să presupunem că pentru n mașini afirmația este demonstrată. Fie $n + 1$ mașini. Atunci, printre ele se găsește o mașină A care poate, folosind numai benzina pe care o are ea, să ajungă pînă la mașina următoare B (acest lucru se demonstrează ușor prin reducere la absurd). Punem din mașina B benzina în A și scoatem mașina B de pe pistă. Printre cei n mașini rămase, după presupunerea de inducție, se găsește una care poate parcurge tot drumul, luînd pe traseu benzină de la celelalte mașini. E clar că această mașină poate să facă acest lucru și în situația inițială, cînd pe pistă sînt $n + 1$ mașini; pe porțiunea de la A la B ea va lua benzină de la mașina A, iar pe restul porțiunilor ea are tot atîta benzină ca și în cazul a n mașini.

Mulți cititori au observat că problema se reduce la următoarea: pe o circumferință sînt scrise n numere a căror sumă este pozitivă; atunci se găsește un astfel de număr pozitiv, încît suma dintre el și următorul este pozitivă, suma dintre el și următorii doi este pozitivă ș.a.m.d., pînă la suma a $n - 1$ numere. (E suficient ca lîngă fiecare mașină să se scrie un număr egal cu diferența dintre cantitatea de benzină pe care o are și cantitatea de benzină necesară ca să ajungă la mașina următoare.)

M 83. *Să se demonstreze că pentru nici un n, numerele 1, 2, ..., n nu pot fi împărțite în două grupe, astfel încît produsul numerelor dintr-o grupă să fie egal cu produsul numerelor din cealaltă grupă.*

Cerinţa problemei rezultă din următoarea teoremă:

Pentru orice $x > 1$, între x şi $2x$ există cel puţin un număr prim. (Prima demonstraţie a acestei teoreme, numită postulatul lui Bertrand, a fost dată de P.L. Cebîşev.)

Vom lua numărul prim p astfel încît $\frac{n}{2} < p < n$. El poate să intre numai într-o grupă de numere şi nu putem să-l „egalăm" cu cineva, pentru că $2p > n$. Acum cerinţa problemei rezultă din teorema unicităţii descompunerii în factori primi.

N.B. Vasiliev

M 84. *Fie A piciorul perpendicularei coborîte din centrul unui cerc dat pe o dreaptă dată d. Pe această dreaptă se iau punctele B şi C, astfel încît $AB = AC$. Prin punctul B respectiv C se duc două secante arbitrare dintre care una taie cercul în punctele P şi Q, iar a doua în punctele M şi N. Dreptele PM şi QN intersectează dreapta d în punctele R, respectiv S. Să se demonstreze că $AR = AS$. (Această problemă — sau unele variante ale sale — se numeşte uneori problema „fluturelui"; provenienţa denumirii rezultă clar din fig. 112.)*

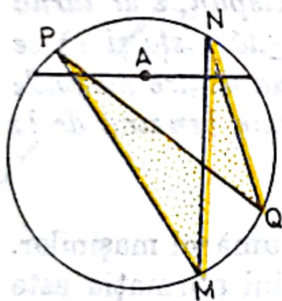


Fig. 112

Fie P', Q', M' şi R' puncte simetrice cu punctele P, Q, M şi R faţă de diametrul KL al cercului, ce trece prin punctul A, şi E şi E' punctele de intersecţie ale dreptei d cu cercul. Trebuie să demonstrăm că punctele R' şi S coincid. Vom demonstra că şi punctul R' şi punctul S sînt situate pe cercul care trece prin punctele C, N şi P'. Acest cerc este unic (cazul în care două dintre punctele C, N şi P' coincid este evident) şi el intersectează dreapta d în afară de punctul C încă într-un singur punct în care trebuie să se afle şi R' şi S.

Punctele C, N, P' şi S sînt situate pe un cerc întrucît (figura 113):

$$2\sphericalangle CSN = \cup EN + \cup QE' = \cup Q'E + \cup EN = \cup Q'N = 2\sphericalangle CP'N,$$

iar punctele C, N, P' şi R' sînt situate pe un cerc, întrucît

$$2\sphericalangle CR'P' = \cup EP' + \cup M'E' = \cup ME + \cup EP' =$$

$$= 360° - \cup\ ME'P' = 360° - 2\sphericalangle CNP'.$$

Această rezolvare suferă de o defecţiune esenţială: ea se bazează în mod explicit pe figura 113 şi nu ţine cont că configuraţia descrisă în problemă poate să aibă cu totul altă înfăţişare; punctele de pe dreaptă pot să fie dispuse în altă ordine, unele dintre punctele B şi R şi chiar întreaga dreaptă d pot să fie în exteriorul cercului (vezi figura 114) etc. Cum se corectează această defecţiune? Trebuie sau să luăm în considerare într-un anumit mod toate cazurile de figură posibile sau să dăm o rezolvare care să fie valabilă pentru toate cazurile. Vom arăta cum se poate face acest lucru, folosind o anumită definiţie a „unghiului dintre două drepte".

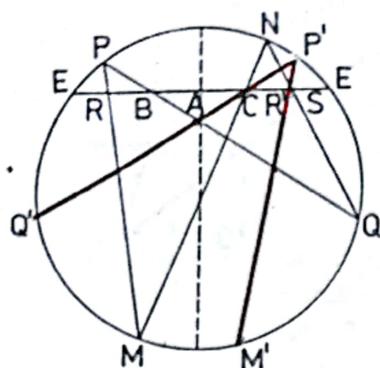


Fig. 113

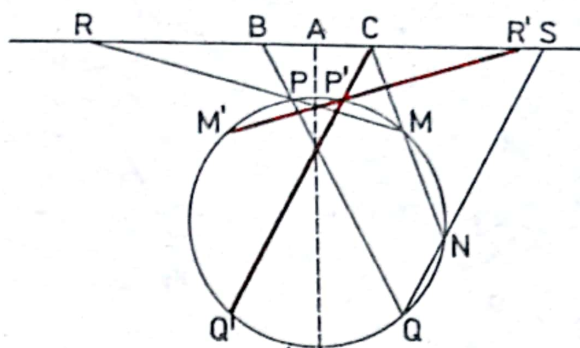


Fig. 114

Fie d_1 și d_2 două drepte din plan care se intersectează în punctul O. Vom nota prin $\measuredangle(d_1, d_2)$ unghiul cu care trebuie să rotim în jurul punctului O, în sens contrar acelor ceasului, dreapta d_1 pentru ca ea să coincidă cu d_2 ($0° < \measuredangle(d_1, d_2) < 180°$). Dacă dreptele d_1 și d_2 sînt paralele sau coincid, atunci, prin definiție $\measuredangle(d_1, d_2) = 0$. Se verifică faptul că pentru orice două puncte date U și V și pentru un unghi dat $\alpha(0° < \alpha < 180°)$ mulțimea punctelor X pentru care $\measuredangle(UX, VX) = \alpha$ va fi un cerc (strict vorbind cu excepția înseși a punctelor U și V); cu alte cuvinte, patru puncte U, V, X_1 și X_2 sînt conciclice atunci și numai atunci cînd $\measuredangle(UX_1, VX_1) = \measuredangle(UX_2, VX_2) \neq \neq 0$ (figura 115, a; comparația figurilor a și b arată avantajul noului mod de definire a unghiului).

Să ne întoarcem la problemă. Acum afirmația că cinci puncte C, N, P', S, R' sînt situate pe același cerc (de unde va rezulta că R' coincide cu S) rezultă din egalitățile

$$\measuredangle(CS, NS) = \measuredangle(Q'Q, NQ) = \measuredangle(Q'P', NP') = \measuredangle(CP', NP');$$

$$\measuredangle(CR', P'R') = \measuredangle(MM', P'M') = \measuredangle(MN, P'N) = \measuredangle(CN, P'N).$$

Aceste egalități se verifică ușor, în mod formal, fără a apela la figură, trebuie doar să știm care puncte sînt situate pe o dreaptă și care pe un cerc; afară de teorema menționată mai sus, s-a mai folosit faptul că $Q'Q \| MM' \| d$. (Desigur, mai trebuie analizate cazurile „degenerate“ în care anumite două puncte care definesc în aceste egalități o dreaptă, coincid; acestea sînt suficient de evidente și nu ne vom opri asupra lor.) Acum problema este complet rezolvată.

Vom da o altă formulare, mai naturală, a acestei probleme (gîndiți-vă pentru ce această formulare este echivalentă cu problema).

Fie P și N două puncte diferite ale unui cerc cu centrul în O; A piciorul perpendicularei duse din punctul O pe o dreaptă dată d și f transformarea care îi pune în corespondență fiecărui punct X de pe dreapta d, punctul $f(X)$ de pe aceeași dreaptă după următoarea regulă: dacă X' este punctul de intersecție a dreptei PX cu cercul, X'' punctul de intersecție a dreptei NX' cu d, atunci $f(X)$ este punctul simetric cu X'' față de A. Această transformare f coincide cu inversa sa, adică $f(f(X)) = X$ pentru toți X (figura 116).

Celor care sînt familiarizați cu noțiunile de bază ale geometriei proiective, le propunem să încerce să găsească o demonstrație „proiectivă“ simplă a acestei teoreme (obser-

Figura 115. Cu arce de cerc s-au indicat mulțimile de puncte pentru care: a) $\sphericalangle(UX, VX) = \alpha$ (stînga) și b) $\sphericalangle UXV = \alpha$ (dreapta)

Figura 116. O altă formulare a problemei M 84: ca rezultat al celor trei transformări indicate pe desen, din punctul X se obține $Y = f(X)$; dacă se efectuează aceleași pentru punctul Y, se obține $f(Y) = X$.

văm că chiar în formulare trebuie să considerăm dreapta d extinsă, adică să adăugăm la d punctul de la infinit căci atunci transformările de care e vorba vor fi bijecții). Iată planul rezolvării „fără calcule".

Dreapta proiectivă completată cu punctul de la infinit, este natural să ne-o închipuim ca un cerc (cînd punctul X parcurge dreapta, punctul X' parcurge o rotație completă pe cerc).

Dacă punctul X se mișcă într-un sens, atunci $Y = f(X)$ se mișcă în sens contrar, de aceea transformarea f are două puncte fixe Z_1 și Z_2, astfel încît $f(Z_1) = Z_1$; $f(Z_2) = Z_2$ (acest lucru este adevărat pentru orice transformare continuă bijectivă f a unui cerc pe el însuși, care schimbă sensul deplasării).

Dacă L este punctul de la infinit al dreptei d, atunci se verifică ușor că $f(f(L)) = L$ și $f(L) \neq L$. Transformarea $X \to f(f(X))$ este proiectivă și are trei puncte fixe: Z_1, Z_2 și L, de aceea $f(f(X)) = X$ pentru toți X.

N.B. Vasiliev

M 85. *Să se demonstreze că dacă $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sînt numere naturale două cîte două diferite, nici unul dintre ele nefiind pătratul unui număr întreg mai mare decît unu, și $b_1, b_2, \ldots, b_m$ numere întregi nenule, atunci*

$$b_1\sqrt{a_1} + b_2\sqrt{a_2} + \ldots + b_m\sqrt{a_m} \neq 0.$$

L.N. Vaserștein

Pînă la $n = 4$, se demonstrează ușor prin reducere la absurd, ridicînd de cîteva ori la pătrat ambele părți (grupate într-un mod convenabil). În cazul general, vom face o demonstrație prin inducție după numărul factorilor primi diferiți $p_1, p_2, \ldots, p_N$ care divid cel puțin pe unul dintre numerele a_i. Așa cum se întîmplă adeseori este mai util să se demonstreze prin inducție o afirmație mai tare (interesantă în ea însăși):

există numerele întregi $c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_e, d_e$, astfel încît $d_i \neq 0$, $c_i \geq 1$, toți divizorii primi ai numerelor c_i fac parte dintre $p_1, \ldots, p_N$ și produsul $(d_1\sqrt{c_1} + \ldots + d_e\sqrt{c_e})(b_1\sqrt{a_1} + \ldots + b_n\sqrt{a_n})$ este un număr întreg nenul.

Vom nota $S = b_1\sqrt{a_1} + \ldots + b_n\sqrt{a_n}$ şi $S' = d_1\sqrt{c_1} + \ldots + d_e\sqrt{c_e}$. Dacă $N = 1$, atunci S are forma $b_1\sqrt{p_1} + b_2\sqrt{1}$ şi se poate lua $S' = b_1\sqrt{p_1} - b_2$, atunci $SS' = b_1^2 p_1 - b_2^2 \neq 0$. Presupunem acum că $N \geq 2$ şi că afirmaţia noastră este adevărată pentru toate valorile mai mici decît N.

Vom nota prin $S_1, S_2, \ldots, S_8$ sumele de forma $\beta_1\sqrt{\alpha_1} + \ldots + \beta_m\sqrt{\alpha_m}$ unde β_i sînt numere întregi, α_i sînt numere întregi pozitive libere de pătrate, cu divizorii primi cuprinşi între numerele $p_1 \ldots p_{N-1}$ $S_1, S_2, \ldots, S_8$ dacă nu se precizează contrariul, se pot egala cu zero.

Suma S poate fi scrisă în forma $S = S_1 + S_2\sqrt{p_N}$, unde $S_2 \neq 0$. După presupunerea de inducţie, există o astfel de sumă S_3 încît $f = S_3 S_2$ este un număr întreg nenul. Produsul $S_2 S$ are forma

$$S_3 S = S_2 S + f\sqrt{p_N} = S_4 + f\sqrt{p_N}$$

cu $f \neq 0$. Rămîne să se demonstreze că

$$S_5 = (S_3 S_4 - S_3 f\sqrt{p_N})S = S_4^2 - f^2 p_N \neq 0.$$

Dacă $S_4 = 0$, atunci este evident. Presupunem acum că $S_4 \neq 0$. Fie $S_4 = \beta_1\sqrt{\alpha_1} + \ldots + \beta_m\sqrt{\alpha_m}$; dacă $m = 1$, atunci $S_4\beta_1\sqrt{\alpha_1}$; atunci $S_4^2 - f^2 p_N = \beta_1^2\alpha_1 - f^2 p_N \neq 0$ (într-adevăr $\beta_1^2\alpha_1$ se divide printr-o putere pară a lui p_N, iar $f^2 p_N$ printr-una impară).

Dacă $m > 1$, atunci se poate scrie S_4 sub forma $S_6 + S_7\sqrt{p}$ unde p este unul dintre numerele prime $p_1, \ldots, p_{N-1}$, $S_6 S_7 \neq 0$ şi numerele de sub semnul radicalului din sumele $S_6 S_7$ nu se divid prin p. Atunci

$$S_5 = S_6^2 + S_7^2 p - f^2 p_N + 2S_6 S_7\sqrt{p} \neq 0$$

datorită ipotezei de inducţie, întrucît $2S_6 S_7 \neq 0$.

Din nou, după ipoteza de inducţie, se găseşte un S_8 astfel încît $S_5 S_8$ este un număr nenul g. Vom lua $S' = S_8(S_3 S_4 - S_3 f\sqrt{p_N})$. Atunci $SS' = S_5 S_8 = g$.

Din teorema demonstrată, rezultă, în particular că dacă b_i sînt numere raţionale oarecare şi a_i numere naturale mai mari decît unu şi libere de pătrate ($i = 1, 2, \ldots, n$; $n > 1$), atunci numărul $b_1\sqrt{a_1} + \ldots + b_n\sqrt{a_n}$ este iraţional.

L. M. Kamnev

M 86. *Fundul unei cutii dreptunghiulare a fost acoperit complet cu plăcuţe de dimensiuni 2×2 şi 1×4. Plăcuţele au fost scoase din cutie şi s-a pierdut o plăcuţă 2×2. În locul ei s-a pus una 1×4. Să se demonstreze că acum nu se mai poate acoperi fundul cutiei.*

L.G. Limanov

Împărţim fundul cutiei în pătrăţele de dimensiune 1×1 şi marcăm pătrăţelele situate pe locurile impare, în rîndurile impare (vezi figura 117). Observăm că fiecare plăcuţă 1×4 care acoperă patru pătrăţele de pe fundul cutiei, va acoperi în mod obligatoriu un număr par de pătrăţele marcate

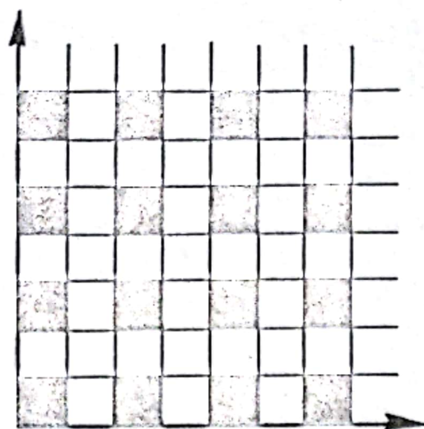


Fig. 117

(două sau nici unul), iar o plăcuță 2×2 totdeauna va acoperi un singur pătrățel marcat. Acum, dacă plăcuțele acoperă complet fundul cutiei rezultă că numărul plăcuțelor 2×2 are aceeași paritate ca și numărul total de pătrate marcate de pe fundul cutiei. De aceea, dacă numărul plăcuțelor 2×2 se modifică cu o unitate (sau, în general cu un număr impar) atunci nu se mai poate acoperi fundul cutiei.

Gîndiți-vă dacă rămîne adevărată afirmația problemei, dacă în locul plăcuțelor 1×4 și 2×2 (fig. 118) se utilizează plăcuțe formate din trei pătrățele: dreptunghiulare 1×3 și „unghiulare“ (fig. 119).

Afirmația nu mai e adevărată. În desenul din stînga sînt patru plăcuțe unghiulare, în cel din dreapta, cinci (fig. 120).

L.G. Limanov

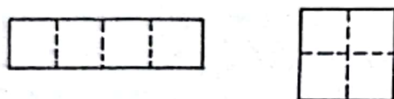


Fig. 118

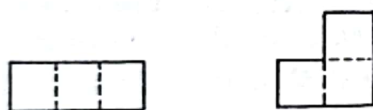


Fig. 119

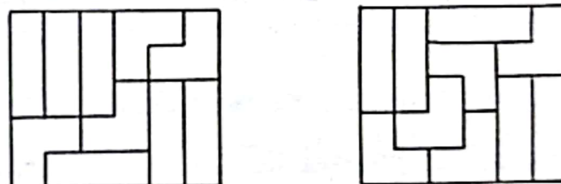


Fig. 120

M 87. *Să se demonstreze că dacă trei cercuri de aceeași rază trec prin același punct, atunci celelalte trei puncte de intersecție ale cercurilor, două cîte două, sînt situate pe un cerc de aceeași rază.*

Presupunem că cele trei cercuri de rază r și de centre O_1, O_2, O_3 se intersectează în punctul A și că două cîte două se mai intersectează în punctele $B_1(O_2$ și $O_3)$, $B_2(O_3$ și $O_1)$, $B_3(O_1$ și $O_2)$. Este evident că mijloacele C_1, C_2 C_3, ale segmentelor AB_1, AB_2, AB_3 sînt în același timp mijloacele segmentelor O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 (figura 121). De aceea fiecare dintre triunghiurile $B_1B_2B_3$ și $O_1O_2O_3$ are laturile respectiv de două ori mai mari decît laturile triunghiului $C_1C_2C_3$ (și paralele cu ele). Prin urmare $\triangle B_1B_2B_3 = \triangle O_1O_2O_3$. Dar este clar că raza cercului circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$ este egală cu r (într-adevăr, $AO_1 = AO_2 = AO_3 = r$), de aceea și raza cercului circumscris triunghiului $B_1B_2B_3$ este tot egală cu r, ceea ce și trebuia dovedit.

Nota trad. l. rom. Problema de mai sus este cunoscută în literatura românească sub numele „problema piesei de cinci lei“ și este atribuită marelui geometru român G. Țițeica, care ar fi descoperit-o trasînd pe o hîrtie, în timpul unui concurs, cercuri cu ajutorul unei monede.

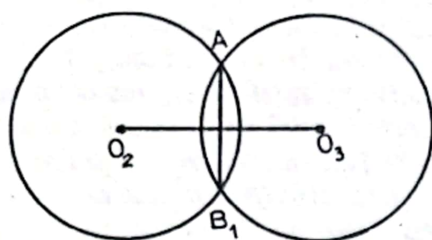


Fig. 121

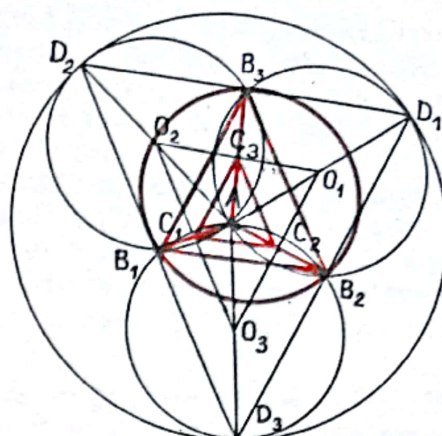


Fig. 122

Mulţi rezolvitori au demonstrat că triunghiurile $B_1B_2B_3$ şi $O_1O_2O_3$ sînt congruente în diferite alte moduri mai complicate în care s-a ţinut cont de diferitele cazuri de figură (anume în rezolvarea noastră nu ne-am referit la o figură pentru ca să subliniem că ea nu depinde de figură). O rezolvare asemănătoare cu a noastră se poate obţine dacă considerăm în locul triunghiului $C_1C_2C_3$, triunghiul $D_1D_2D_3$, unde D_1, D_2, D_3 sînt puncte diametral opuse punctului A în cercurile O_1, O_2, O_3; să se demonstreze că B_1, B_2, B_3 sînt mijloacele laturilor triunghiului $D_1D_2D_3$. În configuraţia pe care am obţinut-o (figura 122) mai este interesant faptul că punctul A este centrul cercului circumscris triunghiurilor $O_1O_2O_3$ şi $D_1D_2D_3$ şi totodată punctul de intersecţie a înălţimilor triunghiurilor $B_1B_2B_3$ şi $C_1C_2C_3$; acest lucru nu s-a utilizat în demonstraţia noastră.

Este interesant că G. Polya a utilizat cu totul altă idee în rezolvarea acestei probleme (vezi G. Polya. Descoperirea în matematică ed. şt. Bucureşti 1971, pag. 241–245).

V.N. Berezin

M. 88. *Ce condiţie trebuie să îndeplinească coeficienţii a, b, c ai ecuaţiei $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, pentru ca cele trei rădăcini ale sale să formeze o progresie aritmetică?*

M.F. Bezborodnikov

Dăm răspunsul dintr-o dată. Relaţia căutată este: $c = \frac{ab}{3} - \frac{2}{27}a^3$ $\left(\text{sau, ceea ce este acelaşi lucru, una dintre rădăcini trebuie să fie egală cu } -\frac{a}{3}\right)$. Într-adevăr, fie x_1, x_2 şi x_3 rădăcinile ecuaţiei date, atunci, după teorema lui Viète

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a.$$

Pe de altă parte, pentru ca x_1, x_2, x_3 să formeze o progresie aritmetică e necesar şi suficient ca

$$x_1 + x_3 = 2x_2.$$

De aceea $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2$, de unde $x_2 = -\frac{a}{3}$.

Încercaţi să găsiţi condiţia pentru care rădăcinile unei ecuaţii de gradul al patrulea formează o progresie aritmetică.

L.I. Moskviciute

M 89. *Să se demonstreze că la orice poligon convex, în afară de paralelogram, se pot găsi trei laturi astfel încît prin prelungirea lor să se formeze un triunghi care să includă poligonul dat (de exemplu, pe figura 123 unde poligonul este marcat cu negru, cele trei linii roşii satisfac cerinţa, cele trei albastre, nu).*

Î. M. Iaglom

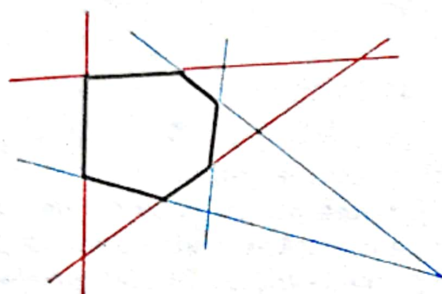


Fig. 123

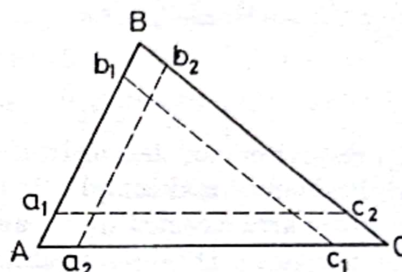


Fig. 124

Această problemă are multe rezolvări diferite. Înainte de a da rezolvarea ei să arătăm de ce este interesantă.

În figura 124 se vede un triunghi ABC şi trei triunghiuri mai mici Ab_1c_1, Ba_1c_2 şi Ca_2b_2 asemenea cu ABC şi obţinute din acesta printr-o contracţie spre punctele A, B, C vîrfurile triunghiului. Triunghiurile Ab_1c_1, Ba_1c_2 şi Ca_2b_2 nu numai că sînt asemenea cu ABC dar ele sînt o m o t e t i c e cu ABC adică sînt asemenea cu ABC şi sînt dispuse paralel cu el. (Ultima afirmaţie înseamnă că laturile care se corespund în triunghiurile asemenea sînt paralele între ele.) E clar că dacă triunghiurile Ab_1c_1, Ba_1c_2, Ca_2b_2 sînt cu puţin mai mici decît triunghiul iniţial ABC atunci ele acoperă complet triunghiul ABC.

În figura 125 este reprezentat un paralelogram $ABCD$ şi patru paralelograme mai mici $Ab_1c_1d_1$, $Ba_1d_2c_2$. $Cb_2a_2d_3$ şi $Da_3b_3c_3$ care se obţin din $ABCD$ prin contracţii spre vîrfurile sale A, B, C D, E clar că dacă aceste patru paralelograme $Ab_1c_1d_1$, $Ba_1d_2c_2$, $Cb_2a_2d_3$ şi $Da_3b_3c_3$ sînt numai puţin mai mici decît paralelogramul iniţial, atunci ele îl acoperă complet. Astfel, fiecare triunghi poate fi acoperit complet de trei triunghiuri mai mici decît ele şi omotetice cu el şi fiecare paralelogram poate fi acoperit complet de patru paralelograme mai mici decît el şi omotetice cu el.

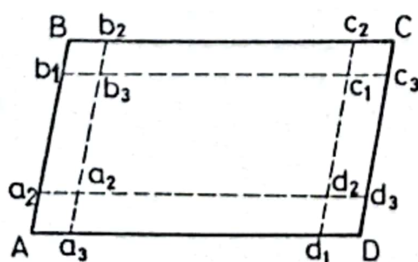


Fig. 125

Dar mai mult decît atît, nu e greu de văzut că 3 este cel mai mic număr de triunghiuri omotetice cu triunghiul dat ABC cu care se poate acoperi triunghiul ABC şi 4 este cel mai mic număr de paralelograme omotetice cu paralelogramul dat $ABCD$ cu care se poate acoperi paralelogramul dat $ABCD$. Într-adevăr, dacă latura AB a paralelogramului $ABCD$ este egală cu c, atunci şi orice segment paralel cu AB şi care aparţine lui $ABCD$ nu depăşeşte

pe c; de aceea într-un paralelogram omotetic cu $ABCD$ şi mai mic decît $ABCD$ orice segment paralel cu AB este mai mic decît c. De aici rezultă că ambele vîrfuri A şi B ale paralelogramului $ABCD$ nu pot fi acoperite de un singur paralelogram omotetic cu $ABCD$ şi mai mic decît el. În modul acesta s-a stabilit că fiecare vîrf al paralelogramului $ABCD$ trebuie să-l acoperim cu paralelogramul „său" mai mic decît $ABCD$ şi omotetic cu $ABCD$; de aceea numărul total al paralelogramelor mai mici decît $ABCD$ şi care-l acoperă, trebuie să fie neapărat nu mai mic decît 4 (după numărul vîrfurilor lui $ABCD$). La fel se stabileşte faptul că numărul triunghiurilor mai mici decît ABC şi omotetice cu el care îl acoperă nu poate fi mai mic decît 3 (căci fiecare vîrf trebuie acoperit de triunghiul „său").

Problema numărului de poligoane omotetice cu un poligon convex dat M şi mai mici decît el, care să-l acopere pe M, a fost pusă în 1960 de matematicienii din Chişinău, I.T. Gohberg şi A.S. Marcus (ceva mai devreme, la mijlocul anilor 50, problema generică a fost formulată de geometrul german F. Levi).

I.T. Gohberg şi A.S. Marcus au formulat această problemă nu pentru poligoane convexe ci pentru *figuri convexe* arbitrare F — adică o figură F, astfel încît prin fiecare punct al frontierei sale se poate duce o dreaptă d astfel încît F să rămînă de o singură parte a lui d — (comparaţi figurile 126, *a* şi *b*). E clar că astfel pusă problema e mai generală decît cea de care ne ocupăm noi, căci poligonul convex este un caz particular de figură convexă. Totuşi se poate demonstra că rezolvarea problemei generale care se referă la figuri convexe, se poate reduce la rezolvarea problemei pentru poligoane convexe (aceasta rezultă din faptul că orice figură convexă F poate fi înlocuită cu un poligon convex „foarte apropiat de ea", de exemplu, cu poligonul înscris în F cu un foarte mare număr de laturi.

Ei au demonstrat următoarea teoremă numită adesea astăzi teorema lui Gohberg-Marcus:

Orice poligon convex M diferit de paralelogram, poate fi acoperit cu trei poligoane mai mici decît M şi omotetice cu M; pentru paralelogram, numărul cel mai mic de paralelograme mai mici decît cel dat şi omotetice cu el, care-l acoperă, este patru.

Demonstraţia originală a teoremei lui Gohberg-Marcus (pentru o figură convexă oarecare) cititorul o poate găsi în cartea: V.G. Boltianski, I.T. Gohberg: Descompunerea figurilor în părţi mai mici (l. rusă), Moscova, „Nauka", 1971, aici vom arăta cum se poate deduce această teoremă din rezultatul problemei M 89. Într-adevăr, fie ABC triunghiul din ipoteza problemei,

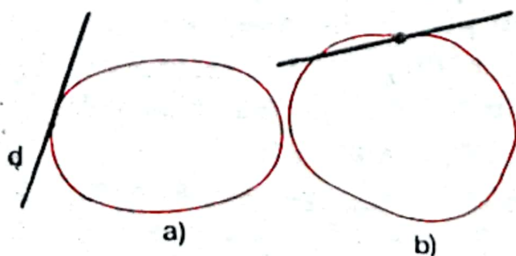


Fig. 126

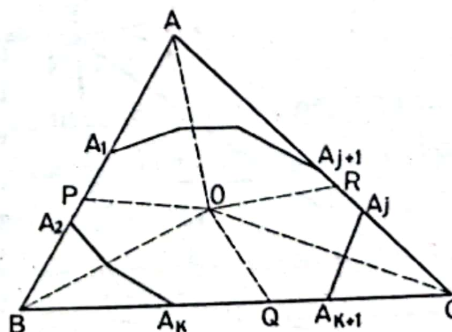
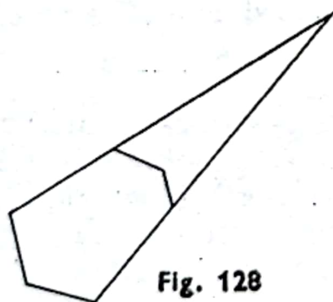


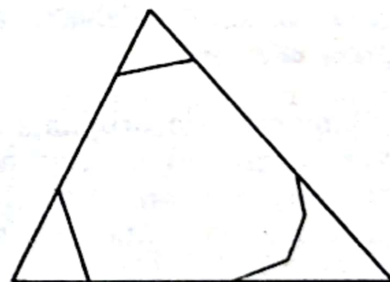
Fig. 127

care conţine în interiorul său poligonul convex (diferit de paralelogram) $M = A_1A_2A_3 \dots A_n$, iar latura AB a triunghiului conţine segmentul A_1A_2, latura BC, segmentul A_kA_{k+1}, şi latura CA, segmentul A_jA_{j+1} (figura 127). Luăm acum în interiorul lui M un punct oarecare O şi-l unim cu nişte puncte P, Q, R respectiv de pe segmentele A_1A_2, A_kA_{k+1} şi A_jA_{j+1}. Cele trei segmente OP, OQ şi OR împart pe M în trei părţi m_1, m_2 şi m_3. Să comprimăm acum poligonul M spre A. Dacă poligonul M_1 obţinut din M în acest mod, diferă puţin de M, atunci el trebuie să acopere complet pe m_1 — pentru demonstraţia acestui fapt este suficient să comparăm graniţele poligoanelor M_1 şi m_1 (efectuaţi singuri, riguros acest raţionament). Analog se demonstrează că poligoanele M_2 şi M_3 mai mici decît M şi omotetice cu M obţinute prin comprimarea spre punctele B şi C a lui M, vor acoperi complet părţile m_2 şi m_3 ale poligonului M. Astfel M poate fi acoperit complet de trei poligoane (poligoanele M_1, M_2 şi M_3) omotetice cu M şi mai mici decît M. Am demonstrat că numărul respectivelor poligoane nu e mai mare decît 3. Se poate demonstra că acest număr este chiar 3.

Să ne întoarcem acum la problema **M 89.** Iată una dintre cele mai simple rezolvări ale ei. Să observăm că dacă poligonul convex M, nu este triunghi sau paralelogram, atunci are două laturi neparalele care nu au un vîrf comun. Prelungindu-le pînă la punctul de intersecţie, obţinem un poligon convex M_1 (vezi figura 128) cu un număr de laturi mai mic decît M şi care-l conţine pe M. Dacă acest poligon M_1, nu este triunghi sau paralelogram, putem proceda cu el ca şi cu M şi aşa mai departe pînă cînd obţinem un triunghi sau un paralelogram care-l conţin pe M şi ale căror laturi sînt obţinute prin prelungirea laturilor lui M.

Dacă ultimul poligon la care ajungem în procesul transformării poligonului iniţial M este un triunghi, atunci problema este rezolvată (vezi figura 129). Dacă la sfîrşit ajungem la un paralelogram $ABCD$ dar poligonul iniţial nu este paralelogram, atunci unul oarecare dintre vîrfurile paralelogramului $ABCD$ nu este vîrf al lui M. Presupunem că vîrful A nu este vîrf al lui M (vezi figura 130). Considerăm atunci, cel mai apropiat vîrf K


Fig. 128


Fig. 129

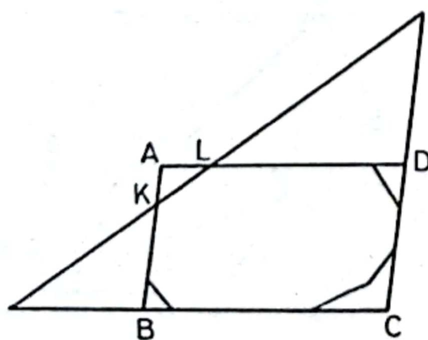


Fig. 130

de A care aparţine segmentului AB şi latura care pleacă din acest vîrf, KL care nu aparţine dreptei AB. Fiindcă poligonul M este convex şi una dintre laturile sale aparţine segmentului AD, atunci latura KL poate să fie situată numai aşa cum este reprezentată în figura 130 (căci tot poligonul M trebuie să fie situat de o aceeaşi parte a lui KL). Dar în acest caz

cele trei drepte BC, CD şi KL se suprapun peste cele trei laturi ale poligonului M şi determină triunghiul cerut de problemă.

Aceiaşi autori au pus şi problema analoagă în spaţiu. Pentru orice poliedru convex M să se determine numărul minim de poliedre mai mici decît M şi omotetice cu el cu care se poate acoperi M. Această problemă este incomparabil mai grea decît problema plană. E uşor de văzut că pentru un tetraedru T, numărul minim este 4; pentru un cub C, numărul minim este *8* (demonstraţi!). Există ipoteza că alte numere în afară de cele cuprinse între 4 şi 8 (8 numai pentru paralelipipede) nu pot să fie. Deocamdată nu s-a putut demonstra această ipoteză decît numai într-un sens (4 este minim). Capitolul de geometrie la care se referă astfel de probleme se numeşte g e o m e t r i e c o m b i n a t o r i e şi a apărut relativ recent (în anii 50).

I.M. Iaglom

M 90. *Să se demonstreze că dacă $x_1 < x_2 < x_3 \ldots$ sînt numere naturale, atunci*

$$\frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{x_3} + \ldots + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-1}}}{x_n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{1}{n^2}$$

G.I. Natanson

Să presupunem la început că $x_n \leqslant n^2$. Atunci

$$\frac{\sqrt{x_i - x_{i-1}}}{x_i} \leqslant \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} = \underbrace{\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_i} + \ldots + \frac{1}{x_i}}_{x_i - x_{i-1} \text{ termeni}}.$$

Ultima sumă, evident că nu depăşeşte următoarea sumă cu tot atîţia termeni

$$\frac{1}{x_{i-1} + 1} + \frac{1}{x_{i-1} + 2} + \ldots + \frac{1}{x_i - 1} + \frac{1}{x_i}.$$

Dar atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{x_i - x_{i-1}}}{x_i} < \frac{1}{x_0 + 1} + \ldots + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 + 1} + \ldots + \frac{1}{x_i} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{x_{n-1} + 1} + \ldots + \frac{1}{x_n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Să presupunem acum că printre numerele $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sînt unele mai mari decît n^2. Dacă $x_i > n^2$, atunci

$$\frac{\sqrt{x_i - x_{i-1}}}{x_i} < \frac{\sqrt{x_i}}{x_i} = \frac{1}{\sqrt{x_i}} < \frac{1}{n}.$$

Astfel, fiecare termen cu numitorul x_i mai mare decît n^2, este mai mic decît $\frac{1}{n}$. Prin urmare suma tuturor acestor termeni (nu sînt mai mulţi decît n) este mai mică decît 1. Dar suma restului termenilor, aşa cum s-a demonstrat mai sus este mai mică decît $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, ceea ce şi termină demonstraţia inegalităţii cerute.

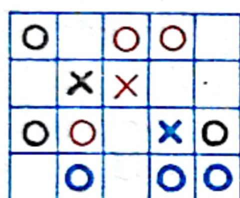
Iu. I. Ionin

M 91. *Două persoane se joacă cu „cruciulițe" și „zerouri" pe o foaie cu pătrățele infinită. Cel care începe pune o cruciuliță într-un pătrățel oarecare. La fiecare mișcare următoare a sa, el trebuie să pună o cruciuliță în orice pătrățel liber, vecin cu unul dintre pătrățele în care este deja o cruciuliță: se consideră pătrățelele vecine cele care au o latură comună sau un vîrf comun. Al doilea jucător, la fiecare mișcare a sa poate să pună deodată trei cerculețe în oricare trei pătrățele libere (nu e obligatoriu să fie una lîngă cealaltă). Să se demonstreze că oricum ar juca primul, al doilea poate să-l „închidă": se ajunge la o situație în care primul nu are unde să pună cruciulița.*

Să se cerceteze jocurile analoage, în care al doilea jucător la o mișcare nu pune trei, ci numai două sau un cerculeț. Care va fi în acest caz rezultatul, la un joc corect al partenerilor: reușesc cerculețele să „închidă" cruciulițele (și care este numărul maxim de mișcări cît „rezistă" cruciulițele) sau jocul se continuă la infinit?

Încercați să studiați alte variante ale acestui joc: cînd se consideră vecine numai pătrățelele care au o latură comună: cînd planul este împărțit nu în pătrate ci în hexagoane regulate; cînd primul poate să pună deodată p cruciulițe, iar al doilea q cerculețe.

A.P. Savin



← **Fig. 131.** Aici e reprezentată una dintre pozițiile la care se poate ajunge după trei mișcări (cu albastru sînt desenate cruciulițele și cerculețele de la prima mișcare, cu roșu cele de la a doua mișcare, cu negru de la a treia.

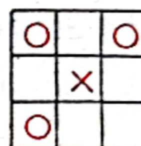
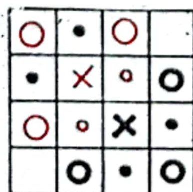


Fig. 132

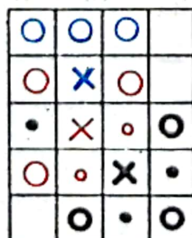
Manevrele cruciulițelor sînt foarte asemănătoare cu manevrele unui desant aerian care încearcă să evite încercuirea, de aceea și jocul se numește „Încercuirea desantului". În varianta de bază, se demonstrează că primul jucător nu poate pune mai mult de 7 cruciulițe. În fig. 132 se arată strategia cerculețelor la prima mutare, ca să se obțină acest rezultat. Într-adevăr, după aceasta, primul jucător poate să pună o cruciuliță în unul din cele cinci pătrățele. E ușor de văzut că numai punînd-o pe cîmpul de sud-est, primul jucător poate să spere că la un joc corect va putea să pună 7 cruciulițe, pentru că la răspunsul cerculețelor reprezentat pe fig. 133, a el poate să spere să pună cruciulițele pe cîmpurile marcate cu puncte, iar dintre cele două cîmpuri marcate cu puncte roșii, nu va putea pune cruciulițe decît pe unul. Cum trebuie să plaseze cerculețele, cel de-al doilea se vede din fig. 133, b.

Dacă primul, pune a doua cruciuliță pe alt cîmp, atunci după mutarea celui de-al doilea se obține una dintre situațiile reprezentate în figura 134 în care mai sînt numai 4 cîmpuri (marcate de asemenea cu puncte) pe care primul poate să pună o cruciuliță la un joc corect al celui de-al doilea. Acesta constă în tăierea tuturor cîmpurilor de deplasare de la o cruciuliță pusă în locul unui punct, analog cum s-a făcut aceasta și în cazul anterior (figura 133, b).



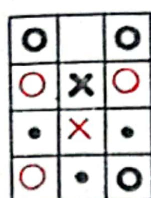
a

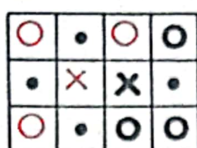
Fig. 133, a

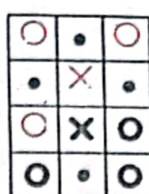


b

Fig. 133, b


a


b


c

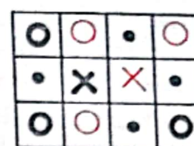

d

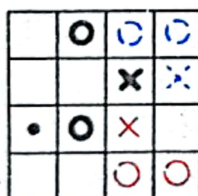
Fig. 134

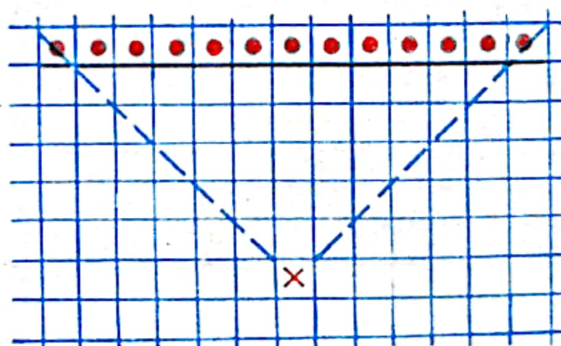
Să încercăm acum să îngreunăm sarcina cerculeţelor. Hotărîm ca al doilea jucător să nu mai pună 3 cerculeţe la fiecare mişcare, ci numai 2. E interesant că dacă de la bun început se încearcă să se pună cerculeţele pe cîmpuri vecine cu cruciuliţele, atunci al doilea nu poate să stăvilească mişcarea cruciuliţelor. Priviţi la figura 135. Aici cerculeţele nu pot împiedica mişcarea cruciuliţelor în sus (linie subţire, prima mişcare, linie îngroşată, a doua linie dublă, a treia). Aceasta e evident pentru că cu fiecare mişcare, cerculeţele acoperă doar două din cele trei cîmpuri care merg în sus.

S-ar părea că acum cerculeţele nu pot să înconjure cruciuliţele şi cu atît mai mult dacă al doilea pune numai cîte un cerculeţ.

Dar dacă al doilea încearcă să realizeze o încercuire departe de prima cruciuliţă? Ar putea el, cel puţin să stăvilească deplasarea cruciuliţelor în sus? Se va vedea că da! Şi chiar în cazul în care pentru fiecare cruciuliţă a primului, al doilea pune un singur cerculeţ. Această strategie a celui de-al doilea o vom numi „înfrîngerea atacului frontal".

Astfel, vom încerca să stăvilim mişcarea cruciuliţelor în sus. Priviţi la figura 136. S-ar părea că este imposibil ca să nu pătrundă cruciuliţele dincolo


Fig. 135


Fig. 136

de linia orizontală, căci după 6 mişcări cruciuliţele pot să fie pe oricare dintre cele 13 pătrăţele marcate cu puncte, iar al doilea poate pune în acest timp doar 6 cerculeţe. Acum să privim figura 137. Jocul a început, şi cu

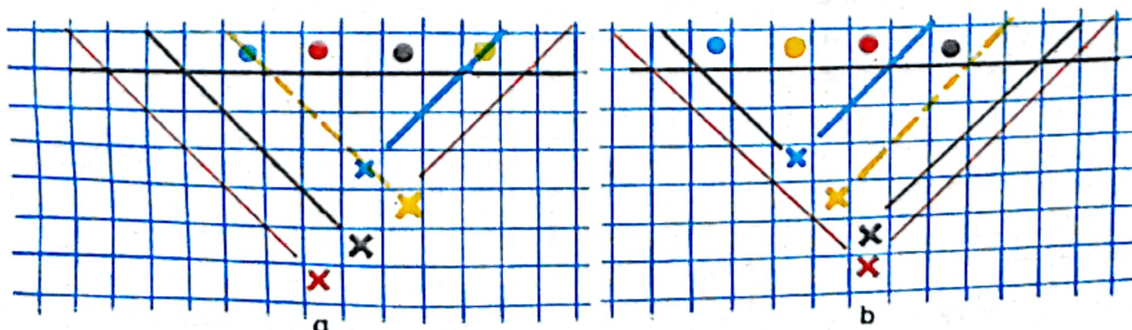

a b

Fig. 137

fiecare mutare cruciulițele amenință un număr tot mai mic de cîmpuri de pe orizontala marcată. După a doua mișcare, 11 cîmpuri, după a treia, 9, după a patra, 7. Dar al doilea reușește să pună în patru mișcări cerculețele astfel încît în cîmpurile amenințate ele să fie puse, unul da, unul nu. (Încercați să demonstrați că la orice joc al primului, al doilea poate să facă acest lucru.) Acum după a cincia mișcare a cruciulițelor se obține una din cele două situații reprezentate în fig. 138. În cazul a), al doilea poate să pună cerculețele în cele două cîmpuri necompletate în orice ordine, iar în cazul b) el trebuie să pună cerculețul întîi în cîmpul din mijloc și apoi în funcție de mișcarea primului în stînga sau în dreapta și deplasarea cruciulițelor este stăvilită.

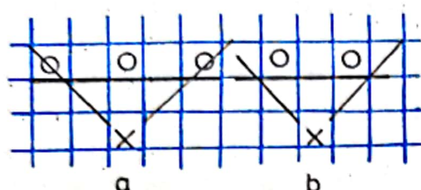


Fig. 138

Astfel „atacul frontal" este respins! Al doilea poate să nu permită cruciulițe dincolo de a șasea orizontală (față de locul primeia).

S-ar părea că problema este rezolvată. Doar în acest mod, putem să oprim cruciulițele, pe oricare dintre direcții, adică să limităm cruciulițele de exemplu, în interiorul unui pătrat. Totuși această concluzie este prematură, ne-am luat în considerare posibilitatea „atacului la colț".

Dacă cruciulița este situată pe diagonala pătratului, atunci ea amenință aproape de două ori mai multe cîmpuri de pe marginea pătratului decît în cazul „atacului frontal" pe latura acestui pătrat, de exemplu, în figura 139 ea amenință ca și mai sus (fig. 137) 13 cîmpuri de pe fiecare latură și în total 25 de cîmpuri.

Vor putea cerculețele să reziste acestui atac? În ajutorul cerculețelor vine posibilitatea de a lua drept cîmp de luptă laturile unui pătrat atît de mare cît e necesar. Vom lua un pătrat mare (cu mult mai mare decît cel din fig. 140) și vom trasa în el un pătrat la șase pătrățele de laturile primului. Centrul pătratului îl luăm în pătrățelul unde a fost pusă prima cruciuliță. Pînă cînd cruciulițele se află în interiorul pătratului mic, laturile pătratului mare nu sînt amenințate de atacul frontal și în acest timp pînă cînd cruciulițele se vor mișca în spre o latură sau un colț al pătratului interior, cerculețele pot să-și întărească pozițiile lor din colțurile pătratului mare, de exemplu,

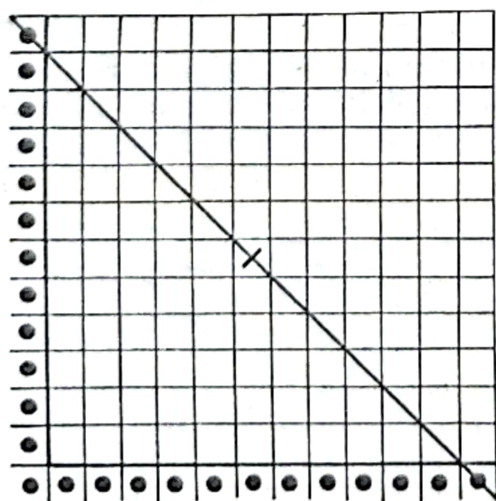


Fig. 139

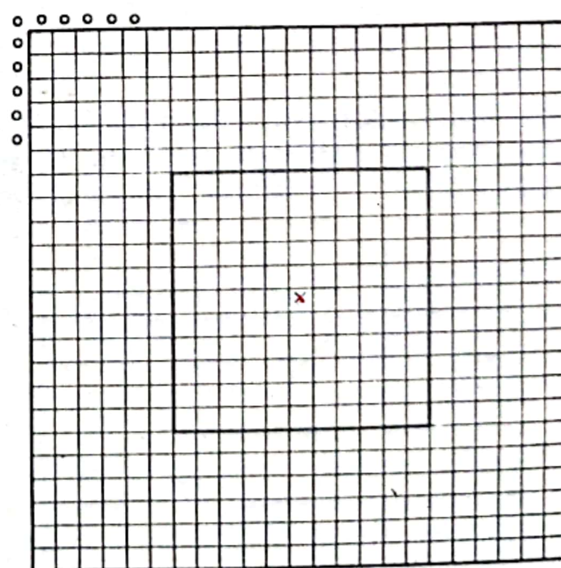


Fig. 140

punînd în fiecare colț cîte 11 cerculețe (figura 140) astfel că „atacul la colț" nu mai are sens, iar atacul pe o latură știm să-l oprim dacă el începe la distanța de șase pătrățele de latură. Pentru ca să plasăm în fiecare colț cîte 11 cerculețe (de fapt se poate și un număr mai mic) e necesar un pătrat interior cu latura 87 de pătrățele și deci pătratul exterior va avea latura de 99 pătrățele.

Formularea exactă a strategiei „cîștigătoare" a cerculețelor și cercetarea celorlalte variante ale acestui joc o lăsăm cititorilor.

A.P. Savin

M 92. *Petre a petrecut cele 90 de zile de vacanță la țară și a respectat următorul program: fiecare a doua zi (adică după cîte o zi) a mers să înoate în lac, fiecare a treia zi a mers la magazin după cumpărături, și fiecare a cincea zi a rezolvat probleme de matematică. (În prima zi el a făcut de toate și a obosit foarte tare.) Cîte zile „fericite" va avea Petre, în care se va duce să înoate dar nu va merge la magazin și nici nu va rezolva problema? Cîte „plicticoase" cînd nu va avea nici o treabă de făcut?*

Iată rezolvarea amănunțită. Să numerotăm toate zilele: 1, 2, 3, ..., 90. Să vedem de cîte ori Petre se va duce să înoate. El a făcut acest lucru în prima zi și apoi din două în două zile. Înseamnă că el se va duce să înoate în zilele cu numere impare (figura 141). Aceste zile sînt în număr de 90 : 2 = 45. La fel se poate afla în cîte zile s-a dus la magazin și în cîte a rezolvat probleme. S-a dus la magazin în zilele al căror număr dă rest 1 la împărțirea prin 3. (Sînt 90 : 3 = 30 astfel de zile; fig. 142.) A rezolvat probleme în zile al căror număr dă restul 1 prin împărțirea la 5 (sînt 90 : 5 = 18 figura 143).

Evident că aceasta nu-i de ajuns pentru ca să știm cîte zile „fericite" și cîte zile „plicticoase" a avut Petre. Trebuie să mai știm cîte zile au fost în care Petre a înotat și s-a dus la magazin (a), a înotat și s-a ocupat de matematică (b), s-a dus la magazin și s-a ocupat de matematică (c) și a făcut toate aceste lucruri (d). Pentru ca să rezolvăm fiecare dintre aceste probleme vom demonstra următoarea lemă generală.



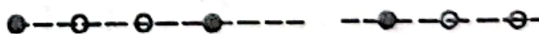


Fig. 141

Fig. 142



Fig. 143

L e m ă. *Dintre toate numerele naturale mai mici decît N, dau restul q la împărțirea prin n un număr de* $\left[\frac{N-1-q}{n}\right]+1$ *numere* ($q \neq 0$). *(Amintim că prin $[x]$ înțelegem cel mai mare întreg cuprins în x.)*

D e m o n s t r a ț i a l e m e i. Dau restul q la împărțirea prin n, următoarele numere: q, $q+1\cdot n$, $q+2\cdot n$, ..., $q+kn$. Întrucît ne interesează

numai numerele mai mici decît N, trebuie să găsim acel întreg k, astfel încît $q + k \cdot n \leqslant N < q + (k+1)n$. Transcriem această inegalitate astfel:

$$kn \leqslant N - 1 - q < (k+1)n$$

şi în sfîrşit aşa:

$$k \leqslant \frac{N-1-q}{n} < k+1.$$

De aici rezultă $k = \left[\frac{N-1-q}{n}\right]$, iar în total numere mai mici decît N şi dînd restul q la împărţirea prin n sînt $\left[\frac{N-1-q}{n}\right] + 1$ (considerînd şi numărul $q = q + 0 \cdot n$).

Acum se obţin uşor răspunsurile la chestiunile a, b, c şi d. Într-adevăr, fiecare dintre aceste chestiuni poate fi reformulată astfel: cîte numere naturale mai mici decît 91 dau restul 1 la împărţirea cu n_i, unde n_i depinde de problemă: $n_a = 6$, $n_b = 10$ $n_c = 15$ şi $n_d = 30$. Înlocuind aceste numere în formula noastră obţinem:

15 zile în care Petre înoată şi se duce la magazin;
9 zile în care înoată şi rezolvă probleme;
6 zile în care merge la magazin şi rezolvă probleme;
3 zile în care face de toate;

Acum putem calcula cîte zile „plictisitoare" şi cîte zile „plăcute" au fost. În total, Petre a petrecut la ţară 90 de zile. În 3 zile a făcut toate cele trei activităţi, în $15 + 9 + 6 = 30$ zile a făcut cîte două şi în $45 + 30 + 18 = 93$ a făcut cîte una. De aceea (vezi figurile 144, 145) în $90 - 93 + 30 - 3 = 24$ zile nu s-a ocupat cu nimic. Deci zile „plictisitoare" au fost 24. Analog se calculează numărul zilelor „plăcute". În total Petre a înotat în 45 de zile, a înotat şi s-a mai ocupat încă de ceva în $15 + 9 = 24$ zile şi s-a ocupat de toate trei activităţile în 3 zile. În final, zile „plăcute" au fost $45 - 24 + 3 = 24$.

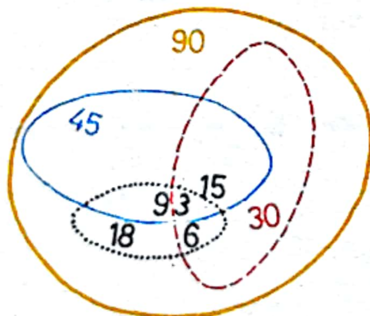


Fig. 144

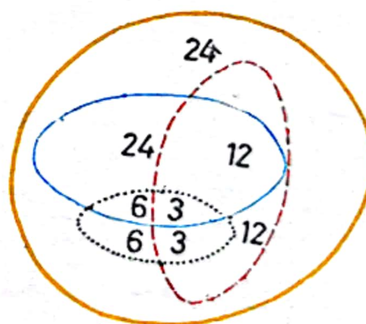


Fig. 145

M 93. *Fiecare dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este egal cu plus sau cu minus unu. Se ştie că*

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0.$$

Să se demonstreze că n se divide la patru.

A.M. Leontovici

Întrucît în suma $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1$ sînt exact n termeni, n este par — numărul termenilor egali cu $+1$ trebuie să fie egal cu numărul termenilor egali cu -1. Rămîne să demonstrăm că numărul de (-1) este par. Pentru aceasta, înmulţim toţi aceşti termeni

$$x_1x_2 \cdot x_2x_3 \cdot x_3x_4 \dots x_nx_1 = x_1^2x_2^2 \dots x_n^2 = 1.$$

Deci numărul de (-1) este într-adevăr par şi n se divide la 4.

M 94. *Să se demonstreze că nu există un poliedru astfel încît în fiecare vîrf să intre cel puţin patru muchii şi fiecare faţă să aibă cel puţin patru laturi.*

A.G. Limanov

Să presupunem că un astfel de poliedru există. Fie $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ unghiurile plane ale feţelor sale. Vom calcula în două moduri diferite media aritmetică a măsurilor lor. Vom grupa unghiurile după feţe. Pentru că fiecare faţă are cel puţin patru laturi, rezultă că media aritmetică a unghiurilor nu e mai mică decît 90°. De aici rezultă că şi media aritmetică a tuturor măsurilor unghiurilor nu e mai mică decît 90°. Grupăm acum unghiurile după vîrfuri. Întrucît în fiecare vîrf apar cel puţin patru unghiuri şi suma măsurilor acestora este mai mică decît 360°, rezultă că media aritmetică a măsurilor unghiurilor dintr-un vîrf este mai mică decît 90° (aici am folosit proprietatea de convexitate a poliedrului; aşa cum au remarcat unii rezolvitori, se poate construi un poliedru neconvex cu „o spărtură" care are toate feţele patrulatere şi în fiecare vîrf intră patru muchii (vezi figura 146). Dar atunci şi media aritmetică a tuturor măsurilor unghiurilor este mai mică decît 90°. Contradicţia obţinută demonstrează că astfel de poliedre convexe nu există.

O altă rezolvare a problemei se poate obţine bazîndu-ne pe formula lui Euler. Fie V numărul vîrfurilor, M a muchiilor şi F a feţelor poliedrului. Atunci, pentru un poliedru convex (şi în general pentru poliedre fără „spărturi pătrunse") este adevărată egalitatea

$$V - M + F = 2.$$

În poliedrul nostru, în fiecare vîrf intră cel puţin cîte patru muchii. De aceea $M \leqslant \frac{4V}{2}$ (trebuie împărţit la 2 pentru că fiecare muchie este luată în considerare în două vîrfuri). În mod analog, întrucît fiecare faţă are acel puţin patru laturi, $M \geqslant \frac{4F}{2}$. De aceea, $2M \geqslant 2(V + F)$, adică $M \geqslant V + F$, şi după formula lui Euler $V + F = M + 2$. Astfel, din presupunerea de existenţă a poliedrului cu proprietăţile menţionate, ar rezulta că $M \geqslant M + 2$, contradicţie.

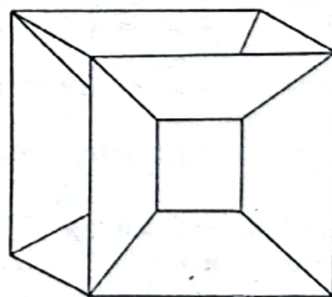


Fig. 146

M 95. *Pe o tablă, s-a desenat un trapez, s-a dus în el linia mijlocie EF şi s-a dus perpendiculara OK din punctul de intersecţie a diagonalelor pe baza mare. Apoi, trapezul s-a şters. Cum se poate reconstitui desenul după segmentele rămase EF şi OK? (vezi figura 147).*

Construcţia trapezului. Ducem prin punctul K o dreaptă d paralelă cu segmentul EF. Căutăm mijlocul M al segmentului EF. Găsim punctul N

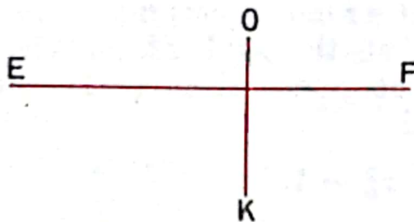


Fig. 147

de intersecţie a dreptei d şi a dreptei OM. Vom construi un paralelogram cu vîrfurile E, N şi F pentru care segmentul EF este diagonală. Notăm al patrulea vîrf al său prin P. Ducem prin el dreapta d' paralelă cu d. Ducem prin punctul O drepte paralele cu laturile paralelogramului $ENFP$. Punctele în care aceste drepte intersectează dreptele d şi d' sînt vîrfurile trapezului.

Construcţia noastră se bazează pe faptul că dreapta OM împarte baza trapezului în jumătate. Demonstraţia acestui fapt simplu şi demonstraţia justeţei construcţiei o lăsăm cititorului.

O altă rezolvare a problemei se poate obţine bazîndu-ne pe faptul că punctul Q de intersecţie a laturilor neparalele ale trapezului este situat pe dreapta OM şi rapoartele distanţelor pînă la dreptele d şi d' ale punctelor O şi Q sînt egale. Folosind aceste lucruri, după ce s-au construit dreptele d şi d' se poate construi punctul Q şi unindu-l cu punctele E şi F se găsesc vîrfurile trapezului.

Discuţie. Să analizăm diferite cazuri de aşezare a segmentelor EF şi OK.

1. Punctul O este situat pe segmentul EF. Atunci nu există soluţie (dacă punctul O este mijlocul segmentului EF, atunci dreapta OM poate fi dusă aproape arbitrar, e bună orice dreaptă care intersectează segmentul EF în punctul O. Trapezul respectiv se transformă în paralelogram (fig. 148.)

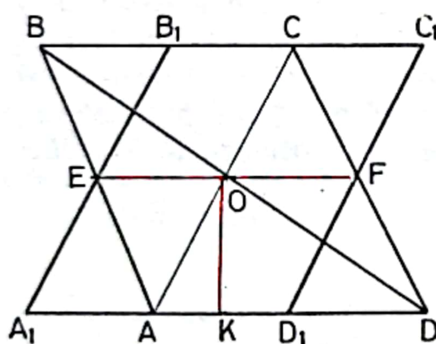
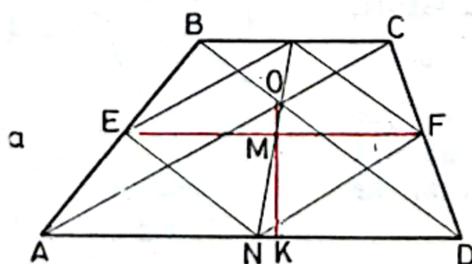


Fig. 148

2. Punctul O nu este situat pe segmentul EF. Atunci soluţia este unică. Totuşi, dacă segmentele perpendiculare EF şi OK sînt desenate arbitrar (şi nu s-au obţinut prin „ştergerea" unui trapez real) atunci construcţia noastră nu duce totdeauna la trapez. Trapez se obţine numai dacă segmentul OM este mai scurt decît MN (fig. 149, a şi b). Dacă segmentele OM



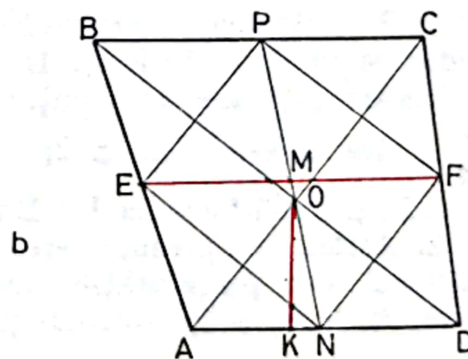


Fig. 149, a şi b

şi MN sînt congruente, atunci se obţine un triunghi (figura 150). Dacă OM este mai mare decît MN atunci se obţine un „trapez autointersectat" (figura 151, a şi b).

L. Limanov

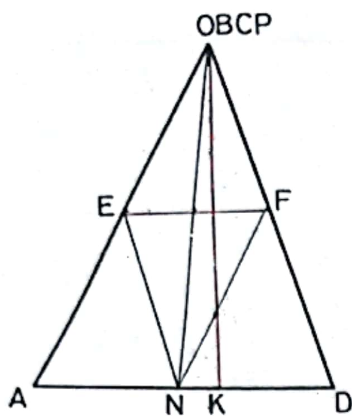
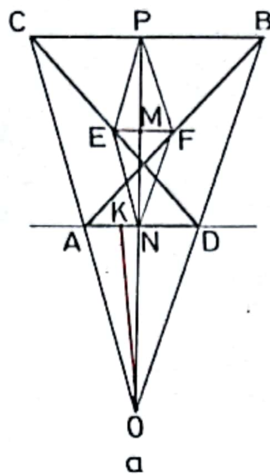


Fig. 150



b

Fig. 151

M 96. *Despre cinci numere pozitive se ştie că dacă din suma oricăror trei dintre ele se scade suma celorlalte două, diferenţa va fi pozitivă. Să se demonstreze că produsul tuturor celor zece astfel de diferenţe, nu e mai mare decît pătratul produselor numerelor date.*

S.T. Berkolaiko

Fie a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 numerele date. Atunci

$$(a_1+a_2+a_5-a_3-a_4)(a_1+a_3+a_4-a_2-a_5)=a_1^2-(a_2+a_5-a_3-a_4)^2\leqslant a_1^2.$$

Analog se demonstrează că:

$$(a_2+a_3+a_1-a_4-a_5)\cdot(a_2+a_4+a_5-a_3-a_1)\leqslant a_2^2$$
$$(a_3+a_4+a_2-a_5-a_1)\cdot(a_3+a_5+a_1-a_4-a_2)\leqslant a_3^2$$
$$(a_4+a_5+a_3-a_1-a_2)\cdot(a_4+a_1+a_2-a_5-a_3)\leqslant a_4^2$$
$$(a_5+a_1+a_4-a_2-a_3)\cdot(a_5+a_2+a_3-a_1-a_4)\leqslant a_5^2.$$

Rămîne să înmulţim aceste inegalităţi şi problema este rezolvată.

Să se demonstreze o afirmaţie mai generală: dacă sînt date $2n+1$ numere pozitive, astfel încît diferenţa dintre suma oricăror $n+1$ numere şi suma celorlalte n numere este pozitivă, atunci produsul P al celor C_{2n+1}^{n} diferenţe şi produsul A al celor $2n+1$ numere sînt legate prin relaţia

$$P^n\leqslant A^{C_{2n}^{n-1}}.$$

M 97. *În trapezul $ABCD$ cu bazele $AB=a$ şi $CD=b$, s-a dus segmentul A_1B_1 care uneşte mijloacele diagonalelor. În trapezul obţinut A_1B_1CD din nou s-a dus segmentul A_2B_2 care uneşte mijloacele diagonalelor şi aşa mai departe (vezi figura 152). Se poate ca în şirul lungimilor segmentelor AB, A_1B_1, A_2B_2, ... o valoare să se întîlnească de două ori? Va fi acest şir monoton (crescător sau descrescător)? Tinde el către o anumită limită?*

A.L. Rozental

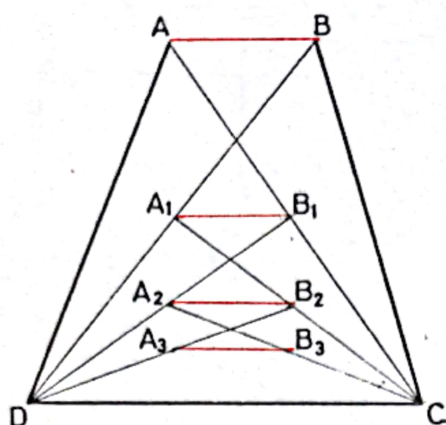


Fig. 152

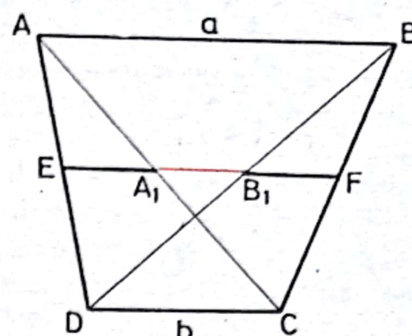


Fig. 153

Fie A_1 şi B_1 mijloacele diagonalelor AC şi BD ale trapezului, E şi F mijloacele laturilor neparalele AD şi BC (fig. 153). Întrucît A_1F este linia mijlocie a triunghiului ACB, iar B_1F este linia mijlocie a triunghiului DCB, punctele A_1 şi B_1 sînt situate pe segmentul EF şi

$$a_1 = A_1B_1 = |A_1F - B_1F| = \left|\frac{a-b}{2}\right|.$$

(Această formulă este adevărată indiferent care dintre numerele a sau b este mai mare.)

La fel se demonstrează că

$$a_{n+1} = \left|\frac{a_n - b}{2}\right| \tag{1}$$

unde $a_n = A_nB_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ este termenul general al şirului care ne interesează. Astfel problema s-a redus la o problemă pur algebrică asupra unui şir definit de relaţia (1) cu termenul iniţial $a_0 = a > 0$. Dacă $a > b$, fiecare termen al şirului va fi mai mic decît cel precedent, cel puţin cu b $\left(\text{dacă } a_n > b, \text{ atunci } a_{n+1} = \frac{a_n - b}{2} < a_n - b\right)$ şi acest lucru se va întîmpla pînă cînd se va întîlni un termen a_m astfel încît $a_m \leqslant b$ (dacă $a \leqslant b$, atunci vom pune $m = 0$, $a_m = a_0 = a$).

Vom considera acum cazul $n \geqslant m$. Dacă $a_n \leqslant b$, atunci

$$a_{n+1} = \frac{b - a_n}{2} \leqslant \frac{b}{2} < b.$$

Astfel, toţi termenii următori lui a_m vor fi mai mici decît b şi de aceea pentru toţi $n \geqslant m$.

$$a_{n+1} = \frac{b - a_n}{2}. \tag{2}$$

Ecuaţia $x = \frac{b - x}{2}$ are o soluţie unică $x = \frac{b}{3}$. De aceea, dacă şirul $\{a_n\}$ are limită, ea este egală cu $b/3$.

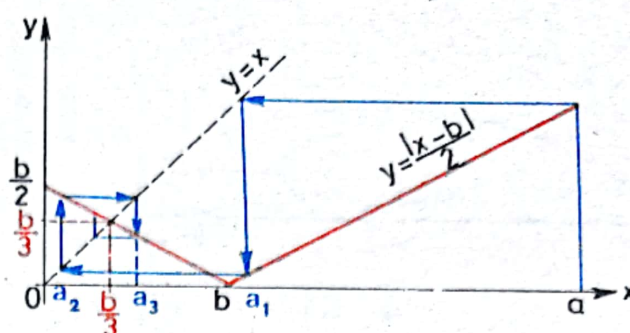


Fig. 154. Termenii şirului a_n definit de relaţiile $a_n = a$, $a_{n+1} = \left|\frac{a_n - b}{2}\right|$ sînt abscisele vîrfurilor liniei frînte. Laturile acesteia sînt în mod alternativ paralele cu axele Ox şi Oy, iar vîrfurile sale sînt situate alternativ pe dreapta de ecuaţie $y = x$ şi pe graficul funcţiei $y = \left|\frac{x-b}{2}\right|$.

Fie $a_m = \frac{b}{3}$. Vom pune $a_n = \frac{b}{3} + \delta_n$. Atunci din (2), rezultă că

$$\frac{b}{3} + \delta_{n+1} = \frac{b}{3} - \frac{\delta_n}{2},$$

adică

$$\delta_{n+1} = -\frac{\delta_n}{2}; \tag{3}$$

— la trecerea de la n la $n+1$, diferenţa $a_n - \frac{b}{3} = \delta_n$ îşi schimbă semnul şi în valoare absolută se micşorează de două ori. Acum, totul e clar: în şirul a_n nici o valoare nu poate fi întîlnită de două ori, întrucît fiecare termen este mai apropiat de $b/3$ decît precedentul. Acest şir nu este monoton dar tinde către limita $b/3$ (figurile 154, 155).

Vom demonstra riguros, folosind definiţia limitei că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{b}{3}. \tag{4}$$

Fie dat $\varepsilon > 0$. Atunci dacă $n > N$, unde $N = N(\varepsilon)$ este cel mai mic număr natural pentru care $2^N\varepsilon > 2^m|\delta_m|$, atunci

$$\left|a_n - \frac{b_n}{3}\right| = |\delta_n| = \frac{|\delta_m|}{2^{n-m}} < \frac{|\delta_m|}{2^{N-m}} < \varepsilon.$$

Astfel (4) este demonstrată.

Desigur că limita este egală cu $b/3$ şi în cazul în care $a_m = \frac{b}{3}$. În acest caz toţi termenii următori sînt egali tot cu $\frac{b}{3}$. Să precizăm în ce caz se întîmplă aceasta. Dacă $m=0$, atunci $a = \frac{b}{3}$. Dacă $m = 1$ şi $a_1 = \frac{a-b}{2} = \frac{b}{3}$, atunci $a = 5b/3$. În general dacă $a_m = \frac{b}{3}$, atunci $a = a_0$ se obţine din valoarea lui a_m după aplicarea de m ori a formulei $a_{n-1} = 2a_n + b$. Astfel, cum se verifică uşor, valorile lui a pentru care $a_m = b/3$ formează şirul $\frac{b}{3}, \frac{5b}{3}, \frac{13b}{3}, \ldots, \frac{(2^k-3)b}{3}, \ldots$. Pentru aceste valori (şi numai pentru acestea) ale lui a, şirul va fi monoton (şi de la un moment dat constant).

Fig. 155

Fig. 156

Nu am distins cazul în care $a_m = b$ $\left(\text{atunci } a_{m+1} = 0,\ a_{m+2} = \frac{b}{2} \ldots\right)$ din punct de vedere algebric, el nu e remarcabil prin nimic, dar trapezele corespunzătoare pentru $n = m$ şi $n = m + 1$ devin paralelogram, respectiv triunghi (punctele B_{m+1} şi C_{m+1} coincid, figura 156); începînd de la $n = m + 2$ se obţin trapeze propriu-zise şi ca mai sus a_n tinde către limita $b/3$.

M 98. *Să se demonstreze că în tabloul*

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\
1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

în care fiecare număr este egal cu suma celor trei aflate deasupra sa, în fiecare linie (începînd cu a treia) se află un număr par. Se află în fiecare linie (începînd cu a treia) un număr multiplu de trei?

Cercetăm întîi problema divizibilităţii prin doi. Vom scrie în tablou, în locul numerelor pare, 0, iar în locul celor impare, 1. Atunci tabloul format din 0 şi 1 trebuie făcut după aceeaşi regulă (fiecare număr se obţine ca suma celor trei numere de deasupra sa, în rîndul anterior), dar adunarea trebuie făcută „după modulul doi", după regula $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$.

Prima rezolvare este bazată pe următoarea consideraţie: ultimele patru numere ale fiecărui rînd depind de ultimele patru numere ale rîndului precedent şi ca atare nu e de mirare că aceste cvartete se repetă (cu perioada 4, vezi figura 157).

O altă rezolvare se bazează pe reducerea la absurd. Să presupunem că un anumit rînd ar fi format în întregime din unităţi

$$1\ 1\ 1 \ldots 1\ 1\ 1.$$

Atunci rîndul precedent cum se constată uşor, poate fi numai astfel

$$1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1$$

iar precedentul acestuia

$$1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1.$$

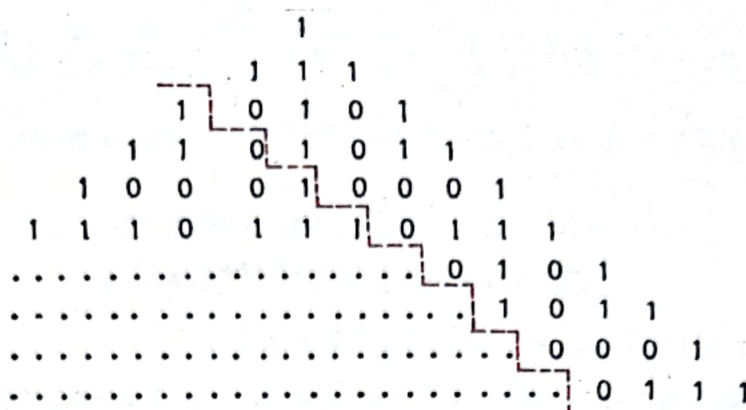


Fig. 157

Dar acesta nu poate exista, pentru că în fiecare rînd există un număr impar de numere.

În ceea ce privește divizibilitatea prin trei, așa cum se verifică ușor, chiar următorul rînd al tabloului, al patrulea, (rîndul întîi format numai dintr-un 1, e bine să-l numerotăm cu 0).

1 4 10 16 19 16 10 4 1

nu are nici un număr divizibil prin 3 (și toate dau la împărțirea prin 3 restul 1). Analizînd structura tabloului „după modulul 3" (în figură numerele care dau la împărțirea cu trei resturile 0, 1 și 2 sînt marcate cu cerculețe respectiv albastre, negre și roșii) se poate observa că de aceeași proprietate, se bucură și rîndurile cu numerele 1; $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 3^2 = 13$, $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 40$ ș.a.m.d.

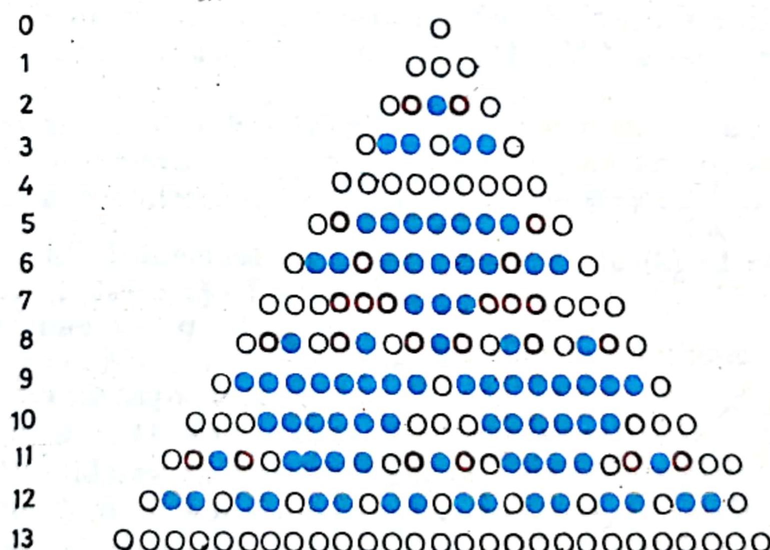


Fig. 158

Numerele acestui tablou au și alte proprietăți. Unele se pot deduce din faptul că pe rîndul al n-lea al tabloului sînt coeficienții polinomului

$$(1 + x + x^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} B_n^k x^k.$$

De exemplu, este evident că $\sum_{k=0}^{2n} B_n^k = 3^n$, $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k B_n^k = 1$ şi nu e greu de demonstrat că $\sum_{k=0}^{n} (B_n^k) = B_{2n}^{2n}$. Verificaţi că dacă p este prim, $s < p$ şi $r < p$, atunci

$$B_{mp+r}^{jp+s} \equiv B_m^j B_r^s + B_m^{j-1} B_r^{s+p} \pmod{p}$$

(dacă $k > 2n$, atunci B_n^k se consideră zero).

M 99. *În triunghiul ABC, latura AC este cea mai mare. Să se demonstreze că pentru orice punct M al planului, $AM + CM \geqslant BM$. În ce cazuri e posibilă egalitatea?*

N.B. Vasiliev

Vom demonstra la început următoarea lemă.

Lemă. *Pentru orice patru puncte A, B, C, M din plan există relaţia*

$$AC \cdot BM \leqslant AB \cdot CM + BC \cdot AM. \quad (1)$$

Egalitatea are loc atunci şi numai atunci cînd $ABCM$ este un patrulater convex inscriptibil (sau cînd unul dintre termenii din membrul drept este nul datorită faptului că două puncte coincid).

Demonstraţia lemei. Alegem punctul P astfel încît $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CAM$ şi $\sphericalangle MAP = \sphericalangle CAB$, iar $PA = \frac{AB \cdot AM}{AC}$ (fig. 159). Atunci $\triangle BAP \sim \triangle CAM$ (primul se obţine dintr-al doilea printr-o comprimare de raport $AB : AC$ şi printr-o rotaţie de unghi BAC) şi $\triangle MAP \sim \triangle CAB$ (primul se obţine dintr-al doilea printr-o rotaţie de unghi CAM şi printr-o comprimare de raport $AM : AC$). Acum vom folosi inegalitatea triunghiului

$$BM \leqslant BP + PM. \quad (2)$$

Întrucît $BP = \frac{AB}{AC} \cdot CM$ şi $PM = BC \cdot \frac{AM}{AC}$, vom obţine relaţia (1). Egalitatea se obţine în (2) atunci cînd P este pe segmentul BM. Ne convingem uşor de faptul că acest lucru se întîmplă atunci cînd cele patru puncte A, B, C, M sînt situate pe un cerc (în ordine indicată, şi două puncte vecine pot să coincidă).

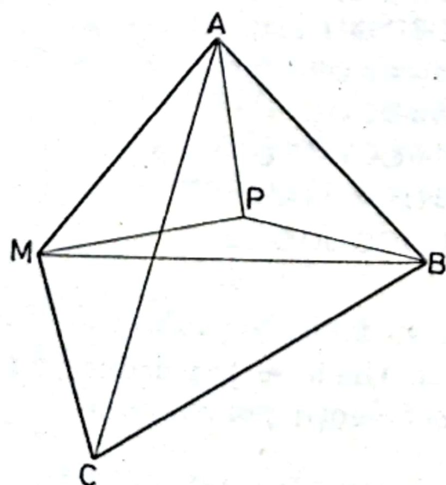


Fig. 159

Relativ la această demonstraţie pot să apară îndoieli: este valabilă ea pentru orice aşezare a punctelor A, B, C, M din plan; nu depinde de particularităţile figurii? Cel mai simplu este, ca să le risipim, să rezolvăm problema analitic, cu ajutorul numerelor complexe. Notînd numerele complexe prin litere mici corespunzătoare, avem egalitatea:

$$(c - a)(m - b) = (b - a)(m - c) + (c - b)(m - a)$$

care se verifică uşor prin calcul. Aplicînd modulele şi ţinînd cont de faptul că modulul sumei este mai mic sau egal cu suma modulelor, obţinem chiar relaţia căutată.

Din lemă rezultă imediat cerinţa problemei: dacă $AB \leqslant AC$ şi $BC \leqslant AC$ atunci

$$AC \cdot BM \leqslant AB \cdot CM + BC \cdot AM \leqslant AC \cdot CM + AC \cdot AM$$

de unde

$$BM \leqslant AM + CM.$$

Totodată obţinem că egalitatea se realizează în următoarele cazuri:

dacă triunghiul ABC este isoscel (AC latură egală) şi punctul M este în vîrful său;

dacă triunghiul ABC este echilateral şi punctul M este situat pe arcul AC al cercului său circumscris, care nu conţine punctul B.

(Lema utilizată se numeşte „inegalitatea lui Ptolomeu".)

M 100. *Să se demonstreze că suma următoarelor 45 de numere: tg 1° + tg 5° + tg 9° + ... + tg 173° + tg 177° este egală cu 45.*

B.P. Beşkarev

Vom demonstra că

ctg 1° + ctg 5° + ctg 9° + ... + ctg 173° + ctg 177° = 45 care este acelaşi lucru cu egalitatea cerută întrucît tg 1° = ctg 89°, tg 5° = ctg 85°, ... tg 89° = ctg 1°; tg 93° = ctg 177°, tg 97° = ctg 173°, ..., tg 177° = ctg 93°

Nu e greu de demonstrat prin inducţie că

$$\operatorname{ctg} nx = \frac{p_n(\operatorname{ctg} x)}{q_n(\operatorname{ctg} x)}$$

unde $p_n(y) = y^n - \frac{n(n-1)}{2} y^{n-2} + \ldots$ şi $q_n(y) = ny^{n-1} - \ldots$ sînt polinoame în y. (O formulă analoagă s-ar putea scrie pentru tg nx, dar aspectul ei va fi diferit întrucîtva pentru n par şi impar, de aceea am preferat să lucrăm cu cotangente. De fapt coeficienţii polinoamelor $p_n(y)$ şi $q_n(y)$ sînt coeficienţii binomiali:

$$p_n(y) = y^n - C_n^2 y^{n-2} + C_n^4 y^{n-4} - \ldots; \quad q_n(y) = C_n^1 y^{n-1} - C_n^3 y^{n-3} + C_n^5 y^{n-5} - \ldots$$

Dealtfel, nouă ne trebuie numai primul coeficient al polinomului q_n.)

Întrucît, pentru fiecare dintre unghiurile

$1° + 4° k$, unde $k = 0, 1, 2, \ldots, 44$, avem $\operatorname{ctg} 45(1° + 4° \cdot k) = \operatorname{ctg}(45° + 180° \cdot k) = 1$ rezultă

$$\frac{p_{45}(\operatorname{ctg}(1° + 4° \cdot k))}{q_{45}(\operatorname{ctg}(1° + 4° \cdot k))} = 1,$$

adică toate numerele $y = \operatorname{ctg}(1° + 4° k)$ sînt rădăcinile ecuaţiei

$$p_{45}(y) - q_{45}(y) = 0. \qquad (*)$$

Este important coeficientul lui y^{44}, de aceea vom scrie pe (*), astfel:

$$y^{45} - 45y^{44} + \ldots = 0. \qquad (**)$$

Acum a mai rămas să observăm că toate aceste 45 de numere $\mathrm{ctg}(1^\circ + 4^\circ k)$ sînt diferite (întrucît $\mathrm{ctg}\ 1^\circ > \mathrm{ctg}\ 5^\circ > \ldots > \mathrm{ctg}\ 177^\circ$). Astfel, acestea sînt toate cele 45 de rădăcini diferite ale ecuației (*). Prin urmare după relația lui Viète, suma lor este 45.

Iată și două rezolvări, trimise de cititori, care au încercat să facă direct calculele cerute. Dăm doar rezultatele intermediare ale rezolvărilor, pentru ca să arătăm cîtă artă trebuie dacă nu se folosește „știința".

I. Utilizăm identitatea $\mathrm{tg}\ \alpha + \mathrm{tg}(\alpha+60^\circ) + \mathrm{tg}(\alpha + 120^\circ) = 3\ \mathrm{tg}\ 3\ \alpha$(***) de 15 ori, aplicată la $\alpha = 1^\circ + 4^\circ\ k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, 14$) adunăm cele 15 egalități și aplicăm din nou (***) și aducem suma inițială la forma: $9(\mathrm{tg}\ 9^\circ + \mathrm{tg}\ 81^\circ - \mathrm{tg}\ 63^\circ - \mathrm{tg}\ 27^\circ) + 9$ după care rămîne de demonstrat că paranteza este egală cu 4.

$$\text{II. } \sum_{k=0}^{44} \mathrm{tg}(1^\circ + 4^\circ \cdot k) = \sum_{k=1}^{45} \mathrm{tg}(45^\circ + 4^\circ \cdot k) = \sum_{k=1}^{45} \frac{1 + \mathrm{tg}\ 4^\circ \cdot k}{1 - \mathrm{tg}\ 4^\circ \cdot k} = 45 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{45} \mathrm{tg}\ 8^\circ \cdot k + \sum_{k=1}^{45} \mathrm{tg}\ 4^\circ k \cdot \mathrm{tg}\ 8^\circ \cdot k \qquad (****)$$

după care se demonstrează că

$$\sum_{k=1}^{45} \mathrm{tg}\ 4^\circ \cdot k = 0, \sum_{k=1}^{45} \mathrm{tg}\ 8^\circ \cdot k = 0, \sum_{j,k=1,\ j\neq k}^{45} \mathrm{tg}\ 4^\circ k \cdot \mathrm{tg}\ 8^\circ j = 0$$

de unde rezultă că ambele sume din (****) sînt nule.

N.B. Vasiliev

M 101. *Într-o colonie formată din n bacterii intră un virus. În primul minut el omoară o bacterie, apoi se divizează în doi noi viruși și concomitent fiecare dintre bacteriile rămase se divizează de asemenea în alte două. În minutul următor cei doi viruși omoară două bacterii, apoi cei doi viruși și toate bacteriile rămase din nou se divizează și așa mai departe.*

Colonia va trăi nelimitat sau va fi omorîtă după un timp?

R.M. Kovtun

Este ușor de văzut că numărul bacteriilor și virușilor se modifică odată cu timpul în felul următor

Timpul (minute)	Numărul virușilor	Numărul bacteriilor
0	1	n
1	2	$2(n-1)$
2	2^2	$2^2(n-2)$
3	2^3	$2^3(n-3)$
...	..	....
t	2^t	$2^t(n-t)$
$t+1$	2^{t+1}	$2^{t+1}(n-t-1)$
...	...	....

De aici e clar că $t = n$ numărul bacteriilor este zero — colonia a murit.

M 102. *O mulțime din plan formată dintr-un număr finit de puncte are următoarea proprietate: pentru orice două puncte A și B ale mulțimii se găsește un punct C al mulțimii, astfel încît triunghiul ABC este echilateral.*

Cîte puncte poate să aibă această mulțime?

V. Gurvari

Vom demonstra că această mulțime poate să aibă numai trei puncte (bineînțeles presupunînd că are mai mult decît unul).

Vom nota această mulțime prin litera G. Fie A și B două puncte ale mulțimii G, astfel încît distanța între ele să fie cea mai mare dintre toate distanțele reciproce ale punctelor mulțimii G. După ipoteză, G trebuie să conțină un astfel de punct C încît triunghiul ABC să fie echilateral: $AB = BC = AC = d$.

Fie P încă un punct al mulțimii G. Întrucît distanța dintre P și A nu depășește pe d, punctul P trebuie să se afle în interiorul cercului de rază d cu centrul în punctul A. La fel, el trebuie să se găsească în interioarele cercurilor de rază d cu centrele în punctele B și C. Astfel, mulțimea G este inclusă în partea comună a acestor trei cercuri care este „triunghiul" curbiliniu T din figura 160. Mai departe, împreună cu punctele P și A, mulțimea G trebuie să conțină unul dintre punctele Q și R care sînt vîrfurile triunghiurilor echilaterale APQ și APR, adică punctele care se obțin din P prin rotație cu $60°$ (într-o parte sau în cealaltă) în jurul lui A (fig. 161). Pentru ca punctul Q să fie situat în interiorul lui T, trebuie ca punctul P să fie situat în cuprinsul „petalei" AB; într-adevăr, dacă rotim triunghiul T în jurul lui A cu $60°$ în sens contrar acelor ceasului, atunci punctele petalei AB și numai ele nu vor ieși dincolo de limitele lui T. La fel, pentru ca punctul R să fie situat în interiorul lui T, trebuie ca punctul P să fie situat în limitele „petalei" AC. Astfel, am demonstrat că orice punct P al mulțimii G trebuie să se găsească între limitele mulțimii T_A formată din două petale AB și AC cu vîrf comun A. Dar analog se demonstrează că G este cuprins între limitele mulțimilor T_B (fig. 162) și T_C și partea comună a acestor trei mulțimi T_A, T_B și T_C constă numai din cele trei puncte A, B și C. Prin urmare, nici un alt punct P nu aparține mulțimii G.

În figurile 160 — 163 sînt desenate domeniile mărginite de arce de cercuri de rază $d = AB$ cu centrele în punctele A, B sau C. Verificați că aceste domenii se intersectează numai în punctele A, B și C.

În rezolvare am folosit numai faptul că în mulțimea G s-au putut găsi două puncte a căror distanță este maximă. Dacă mulțimea G este finită, atunci acest lucru se poate. Dar afirmația problemei rămîne adevărată și dacă supunem mulțimea G la o condiție

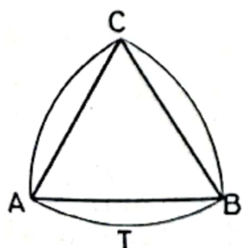


Fig. 160

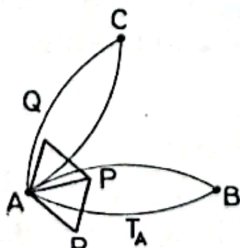


Fig. 161

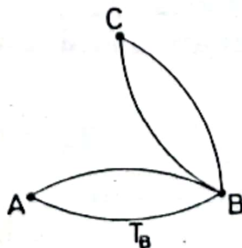


Fig. 162

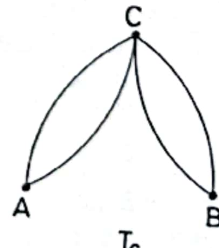


Fig. 163

mai slabă – condiţia de mărginire. Pentru rezolvarea problemei, în acest caz sînt necesare consideraţii suplimentare pe care le poate face cel ce şi-a însuşit primele noţiuni de topologia mulţimilor din plan. Remarcăm că la condiţia de mărginire nu se poate renunţa.

M 103. *Să se cerceteze cîte soluţii are sistemul de ecuaţii*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$$

unde a şi b sînt numere reale.

E.A. Iasinovîi

Schimbăm variabilele cu formulele

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \quad \text{adică} \quad \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

Atunci sistemul iniţial se scrie astfel:

$$\begin{cases} 3u^2 + v^2 = 4a \\ uv = b. \end{cases} \tag{2}$$

Evident, că fiecărei perechi (x, y) îi corespunde o pereche (u, v) şi reciproc, cu formulele (1) aşa încît trebuie să stabilim cîte soluţii (u, v) pentru diferite valori ale parametrilor a şi b, are sistemul (2). (Dintr-o dată se vede că dacă $a < 0$, nu avem soluţii, pentru $a = 0$, $b \neq 0$ de asemenea şi pentru $a = b = 0$, o singură soluţie, $u = v = 0$, dar acest lucru nu trebuie remarcat neapărat, întrucît raţionamentele ulterioare se vor potrivi şi pentru aceste cazuri.)

Scădem şi adăugăm la prima ecuaţie a sistemului (2) a doua ecuaţie amplificată cu $2\sqrt{3}$. Obţinem astfel sistemul:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}u - v)^2 &= 4a - 2\sqrt{3}\, b \\ (\sqrt{3}u + v)^2 &= 4a + 2\sqrt{3}\, b \end{aligned} \tag{3}$$

echivalent cu (2).

(Gîndiţi-vă cum se obţine (2) din (3).) Evident că fiecărei perechi $\sqrt{3}u - v$ şi $\sqrt{3}u + v$ îi corespunde o singură soluţie (u, v) a sistemului. Rămîne să mai ţinem cont că (în real) ecuaţia $z^2 = c$ are două rădăcini $z_1 = \sqrt{c}$, $z_2 = -\sqrt{c}$, dacă $c > 0$, una dacă $c = 0$ şi nici una dacă $c < 0$.

R ă s p u n s. Sistemul are soluţii, atunci şi numai atunci cînd sînt îndeplinite inegalităţile

$$-2a \leqslant b\sqrt{3} \leqslant 2a,$$

iar dacă ambele inegalităţi sînt stricte („mai mic"), atunci vor fi patru soluţii; dacă una dintre ele se transformă în egalitate, vor fi două, dacă ambele se transformă în egalitate (acest lucru e posibil numai dacă $a = b = 0$), atunci o singură soluţie.

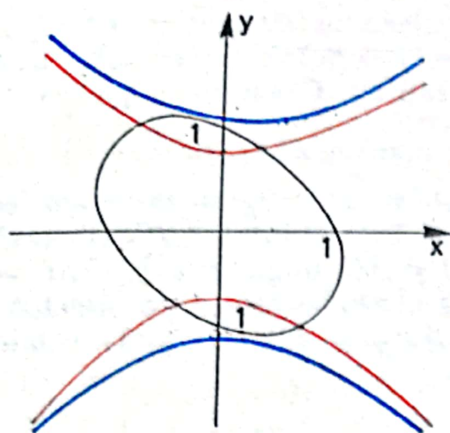


Fig. 164 Cu o rotaţie de 45° în sensul acelor ceasului se obţine din acest desen, desenul alăturat.

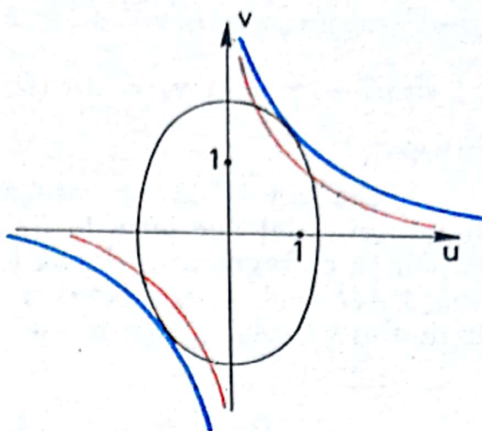


Fig. 165. Graficul hiperbolei roşii are ecuaţia $uv = 1/2$, al celei albastre $uv = 2/3$. Cu negru este desenată şi elipsa de ecuaţie $3u^2 + v^2 = 4$.

S-ar putea da şi formulele care să exprime soluţiile sistemului. Ele sînt destul de greoaie şi nici nu sînt cerute de problemă. În locul acestora dăm interpretarea geometrică a ecuaţiilor sistemului: prima reprezintă o elipsă, a doua o hiperbolă. În figurile 164, 165 hiperbolele roşii corespund la valorile parametrilor a şi b pentru care curbele se intersectează (patru soluţii), cele albastre, cînd hiperbola este tangentă la elipsă (două soluţii).

Se poate cerceta situaţia şi în cadrul numerelor complexe. Raţionamentele anterioare dau răspunsul şi aici: în numere complexe (x, y) sistemul are patru, două sau o soluţie dacă dintre cele două egalităţi $2a = b\sqrt{3}$, $2a = -b\sqrt{3}$ respectiv nici una, una sau amîndouă sînt adevărate.

M 104. *În interiorul triunghiului ABC sînt două puncte P şi Q, astfel încît segmentele AP şi AQ să formeze unghiuri congruente cu bisectoarea unghiului A, iar segmentele BP şi BQ să formeze unghiuri congruente cu bisectoarea unghiului B.*

Să se demonstreze că segmentele CP şi CQ formează unghiuri congruente cu bisectoarea unghiului C (figura 166).

V.N. Berezin

După ipoteză $\sphericalangle PAC = \sphericalangle QAB = \alpha$, $\sphericalangle PBA = \sphericalangle QBC = \beta$. Trebuie să demonstrăm că $\sphericalangle PCA = \gamma_1$ şi $\sphericalangle QCB = \gamma_2$ sînt congruente.

Vom da rezolvarea propusă de E. Turkevici, care utilizează teorema sinusurilor:

Înmulţind egalităţile

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sin\beta}{s\ \sin(A-\alpha)};\quad \frac{CP}{AP} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1};\quad \frac{BP}{CP} = \frac{\sin(C-\gamma_1)}{\sin(B-\beta)};\quad \frac{AQ}{BQ} = \frac{\sin(B-\beta)}{\sin\alpha}$$

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{\sin(A-\alpha)}{\sin(C-\gamma_2)};\quad \frac{BQ}{CQ} = \frac{\sin\gamma_2}{\sin\beta},$$

vom obține

$$\sin(C-\gamma_1)\sin\gamma_2=\sin(C-\gamma_2)\sin\gamma_1 \text{ sau } \sin C\sin(\gamma_1-\gamma_2)=0.$$

Întrucît $0<C<\pi$ și $-\pi<\gamma_1-\gamma_2<\pi$, rezultă că $\gamma_1=\gamma_2$.

I. Berezin a dat o soluție geometrică. Fie P_A, P_B și P_C simetricele punctului P față de laturile BC, AC și AB ale triunghiului ABC. Observăm că pentru ca segmentul AQ să formeze cu AB și AC unghiurile $\sphericalangle PAC=\alpha$ și $\sphericalangle PAB=A-\alpha$, e necesar și suficient ca el să fie așezat pe bisectoarea unghiului P_BAP_C (figura 167). Întrucît $AP_B=AP_C$, această condiție

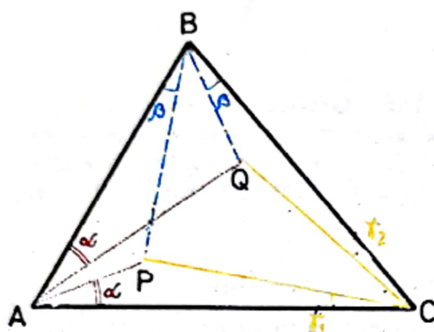


Fig. 166

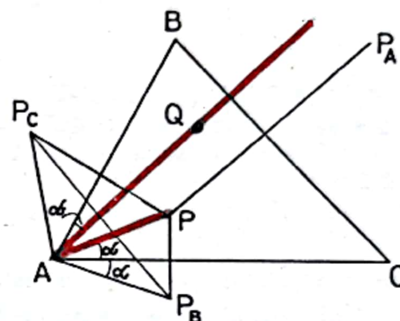


Fig. 167

poate fi formulată astfel: punctul Q trebuie să fie situat pe perpendiculara dusă prin mijlocul segmentului P_BP_C. Acum a mai rămas de demonstrat că dacă punctul Q este situat pe perpendicularele duse prin mijloacele segmentelor P_BP_C și P_CP_A, atunci Q este de asemenea situat pe perpendiculara dusă prin mijlocul segmentului P_BP_C. Acest lucru este evident: punctele P_A, P_B, P_C nu sînt coliniare iar Q este centrul cercului circumscris triunghiului $P_AP_BP_C$ (figura 168).

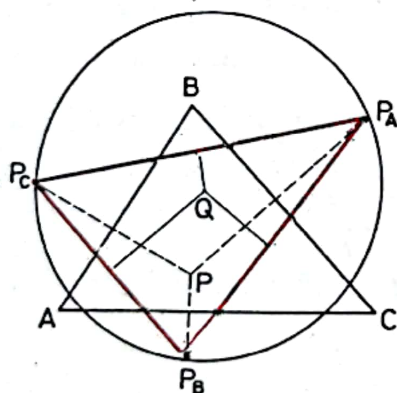


Fig. 168

Desigur, în mod analog se poate demonstra că P este centrul cercului circumscris triunghiului $Q_AQ_BQ_C$ unde Q_A, Q_B, Q_C sînt simetricele lui Q față de laturile BC, CA, AB. Transformarea $P\to Q$ coincide cu inversa sa. Prin această transformare, centrul cercului înscris trece în el însuși, iar centrul cercului circumscris trece în ortocentru și reciproc. (Verificați acest lucru!)

M 105. *Suma cifrelor unui număr, după înmulțirea sa cu 8, se poate micșora: $75\cdot 8=600$ — suma cifrelor a fost $7+5=12$ și a devenit 6. Dar ea nu se poate micșora de mai mult de 8 ori. Să se demonstreze aceasta.*

Cu alte cuvinte, să se demonstreze că pentru orice număr natural N

$$\frac{S(8N)}{S(N)}\geqslant\frac{1}{8}$$

unde $S(A)$ este suma cifrelor numărului A (în scriere zecimală).

Pentru ce numere naturale k există un astfel de număr pozitiv c_k încît pentru orice număr natural N să existe relația

$$\frac{S(kN)}{S(N)} \geqslant c_k?$$

Să se găsească cea mai mare valoare admisă pentru c_k.

I.N. Bernștein

La început să observăm că $S(8 \cdot 125) = S(1\,000) = 1$.

Ne sînt necesare următoarele proprietăți ale funcției $S(N)$:

1°. $S(A + B) \leqslant S(A) + S(B)$;

2°. $S(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) \leqslant S(A_1) + S(A_2) + \ldots + S(A_n)$

3°. $S(nA) \leqslant nS(A)$;

4°. $S(AB) \leqslant S(A)S(B)$.

Pentru ca să ne convingem de justețea proprietății 1°, este suficient să ne închipuim că numerele A și B se adună scrise unul sub celălalt. Proprietatea 2° rezultă din 1° printr-o inducție simplă, 3° este un caz particular al lui 2°. Dacă ne închipuim că numerele A și B se înmulțesc scrise unul sub celălalt și la fiecare cifră a numărului B aplicăm 3° rezultă 4°.

Acum e ușor să demonstrăm inegalitatea cerută: $S(N) = S(1000N) = S(125 \cdot 8N) \leqslant S(125)S(8N) = 8S(8N)$ adică $S(8N)/S(N) \geqslant 1/8$.

Același raționament este valabil pentru orice număr $k = 2^r5^q$. Vom nota prin c_k numărul $\dfrac{1}{S(2^q5^r)}$. Vom demonstra că pentru orice N, există relația $S(kN)/S(N) \geqslant c_k$ (pentru $N = 2^q5^r$, inegalitatea se transformă în egalitate, pentru că $S(kN) = S(10^{r+q}) = 1$). Pentru orice N există relația $S(N) = S(10^{r+q}N) \leqslant S(2^q5^r)S(kN) = \dfrac{1}{c_k}\, S(kN)$ ceea ce trebuia demonstrat.

Vom demonstra acum că pentru numerele k de forma $Q2^r5^q$, unde Q este prim cu 10, raportul $S(kN)/S(N)$ poate fi mai mic decît orice număr $\varepsilon > 0$, adică nu există un număr pozitiv c_k.

Nu este necesară următoarea lemă:

Există numărul $10^m - 1$ (format din m de nouă) care se divide prin Q.

Acest lucru se demonstrează ușor cu ajutorul „principiului lui Dirichlet". Să considerăm resturile la împărțirea prin Q a numerelor 9; 99; 999; 9999;... Sigur două dintre acestea coincid și diferența respectivelor numere se divide prin Q; zerourile de la sfîrșitul acestei diferențe se pot da deoparte (întrucît Q este prim cu 10).

Fie $10^m - 1 = QR$ și n un număr natural. Atunci $10^{mn} - 1$ este un număr format din mn de nouă și se împarte la Q, iar cîtul este

$$R_n = R(10^{m(n-1)} + 10^{m(n-2)} + \ldots + 10^m + 1).$$

Acum să remarcăm că numărul $Q(R_n + 1) = QR_n + Q = 10^{mn} + Q - 1$ are suma cifrelor pentru orice n egală cu $S(Q)$, iar suma cifrelor numărului $R_n + 1$ nu este mai mică decît $(n - 1)\,S(R)$. Astfel, alegînd pe n suficient de mare și luînd $N = R_n + 1$, obținem că

$$\frac{S(kN)}{S(N)} = \frac{S[(R_n + 1)Q2^r5^q]}{S(R_n + 1)} \leqslant \frac{S(2^r5^q)S(Q)}{(n-1)S(R)} < \varepsilon.$$

Astfel am demonstrat că pentru $k = 2^r 5^q$ numărul căutat c_k există și este egal cu $1/S(2^q 5^r)$, iar pentru alte valori ale lui k, un astfel de număr pozitiv c_k nu există.

N.B. Vasiliev

M 106* *Să se demonstreze că dacă numerele p_1, p_2, q_1, q_2 satisfac inegalitatea*

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - p_2 q_1) < 0,$$

atunci trinoamele de gradul al doilea

$$x^2 + p_1 x + q_1 \quad \text{și} \quad x^2 + p_2 x + q_2$$

au rădăcini reale și între rădăcinile unuia se află o rădăcină a celuilalt.

I.F. Șarîghin

Ne sînt utile următoarele proprietăți ale trinomului de gradul al doilea

$$f(x) = x^2 + px + q.$$

1. Dacă pentru un anumit număr c, este îndeplinită inegalitatea $f(c) < 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are două rădăcini reale diferite.

2. Dacă pentru două numere c și d este îndeplinită inegalitatea $f(c)f(d) < 0$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are două rădăcini reale și unul dintre numerele c și d este cuprins între aceste rădăcini iar celălalt, nu.

Aceste proprietăți sînt evidente, dacă ne uităm la graficul din figura 169, dar le vom demonstra riguros.

1. Întrucît $f(c) = c^2 + pc + q = \left(c + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(p^2 - 4q) < 0$ rezultă că $p^2 = 4q > 0$ și ecuația $f(x) = 0$ are două rădăcini $\frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$.

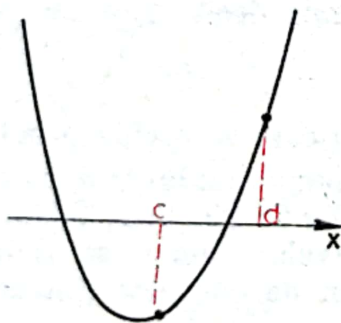


Fig. 169

2. Întrucît $f(c)f(d) < 0$, rezultă că $f(c)$ sau $f(d)$ este negativ. După proprietatea (1), $f(x)$ are două rădăcini reale. Le notăm α și β. Atunci $f(x) = x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$. Numărul x este situat între rădăcini, atunci și numai atunci cînd $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ sau $f(x) < 0$. Întrucît unul dintre numerele $f(c)$ și $f(d)$ este negativ iar celălalt pozitiv, rezultă că unul și numai unul dintre numerele c și d este situat între rădăcini.

Trecem acum direct la rezolvarea problemei. Introducem notațiile $f_1(x) = x^2 + p_1 x + q_1$ și $f_2(x) = x^2 + p_2 + q_2$, $R = (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - p_2 q_1)$. Trebuie să demonstrăm că dacă $R < 0$, atunci fiecare dintre ecuațiile $f_1(x) = 0$ și $f_2(x) = 0$ admite cîte două rădăcini reale diferite și că între două rădăcini ale uneia există o singură rădăcină a celeilalte.

Considerăm diferența

$$f_1(x) - f_2(x) = f_3(x). \tag{1}$$

* Problemele M106 – M115 au fost date la faza finală a Olimpiadei de matematică în 1971 (U.R.S.S.).

Remarcăm că $p_1 - p_2 \neq 0$, pentru că dacă $p_1 - p_2 = 0$, atunci $R = (q_1 - q_2)^2 \geqslant 0$, ceea ce contrazice ipoteza. De aceea ecuaţia $f_3(x) = 0$ are rădăcina $\gamma = -\frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2}$, iar atunci desigur că $f_3(x)$ poate fi scris

$$f_3(x) = (p_1 - p_2)(x - \gamma). \tag{2}$$

În plus, cum rezultă din (1)

$$f_1(\gamma) = f_2(\gamma). \tag{3}$$

Acum, trinomul $f_2(x)$ (înmulţit cu coeficientul $(p_1 - p_2)^2$ „îl împărţim cu rest" la $f_3(x)$ adică scriem identitatea

$$(p_1 - p_2)^2 f_2(x) = f_3(x)g(x) + R. \tag{4}$$

Nu întîmplător am folosit pentru rest aceeaşi literă R ca şi cea cu care am notat expresia dată în problemă. Într-adevăr,

$$(p_1 - p_2)^2 (x^2 + p_2x + q_2) = [(p_1 - p_2)x + (q_1 - q_2)][(p_1 - p_2)x + \\ + (p_1 - p_2)p_2 - (q_1 - q_2) + (q_1 - q_2)] + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - p_2q_1).$$

Înlocuind pe în (4), vom obţine, ţinînd cont că $f_3(\gamma) = 0$,

$$(p_1 - p_2)^2 f_2(\gamma) = R < 0. \tag{5}$$

De aceea, $f_1(\gamma) = f_2(\gamma) < 0$. Prin urmare (după proprietatea 1) ambele ecuaţii au cîte două rădăcini reale. Le vom nota respectiv prin α_1, β_1, şi α_2, β_2. Atunci

$$f_2(x) = (x - \alpha_2)(x - \beta_2). \tag{6}$$

Acum, folosind succesiv (1), (2), (6) şi (5), obţinem

$$f_1(\alpha_2)f_1(\beta_2) = f_3(\alpha_2)f_3(\beta_2) = (p_1 - p_2)^2(\alpha_2 - \gamma)(\beta_2 - \gamma) = \\ = (p_1 - p_2)^2 f_2(\gamma) = R < 0 \tag{7}$$

de unde rezultă (după proprietatea 2) că rădăcinile ecuaţiilor se separă între ele.

Utilizînd graficul, rezultatul cerut de problemă şi relaţia (5) se clarifică în două vorbe (fig. 170). Substratul algebric al rezolvării este mai adînc.

Din rezolvare, dar şi din figură se vede că $R = 0$, atunci şi numai atunci cînd trinoamele f_1 şi f_2 au o rădăcină comună sau coincid. Această situaţie poate fi folosită în probleme de tipul următor: ce condiţii trebuie să

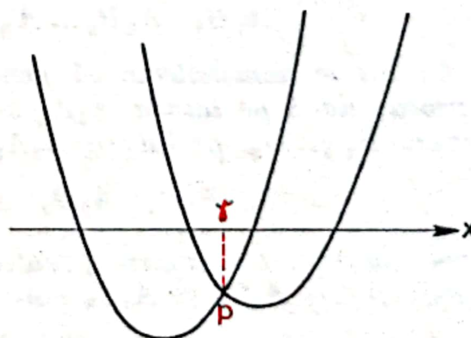


Fig. 170. Pentru ca rădăcinile trinoamelor f_1 şi f_2 să fie reale şi să se separe, este necesar şi suficient ca punctul de intersecţie a graficelor să fie sub axa absciselor adică numărul $f_1(\gamma) = f_2(\gamma) = R/(p_1 - p_2)^2$ să fie negativ.

îndeplinească numerele λ şi μ, pentru ca ecuaţiile $x^2 + \lambda x - 1 = 0$ şi $x^2 + + \mu x - \lambda x + \mu = 0$ să aibă o rădăcină comună? E suficient să introducem în expresia R, valorile $p_1 = \lambda$, $q_1 = -1$, $p_2 = \mu - \lambda$, $q_2 = \mu$ şi condiţia căutată este gata:

$$(\mu + 1)^2 + (2\lambda - \mu)(\mu - \lambda + \mu\lambda) = 0.$$

Se arată că pentru două polinoame de grad oarecare

$$f_1(x) = a_1x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + c_1$$

$$f_2(x) = a_2x^m + b_2x^{m-1} + \ldots + c_2$$

se poate găsi un polinom R care depinde de a_1, a_2, b_1, b_2, ..., c_1, c_2, încît condiţia $R = 0$ să fie îndeplinită atunci şi numai atunci cînd f_1 şi f_2 au un divizor comun (polinom în x de gradul 1 sau mai mare) R se numeşte **rezultantul** polinoamelor f_1 şi f_2.

Într-un curs de algebră superioară se dă scrierea pe scurt a rezultatului sub forma unui determinant format cu coeficienţii lui f_1 şi f_2.

Noţiunea de rezultant devine foarte de înţeles în cazul în care f_1 şi f_2 sînt descompuse în factori

$$f_1 = a_1(x - \alpha_1)(x - \beta_1)\ldots(x - \gamma_1), \quad f_2 = a_2(x - \alpha_2)(x - \beta_2)\ldots(x - \gamma_2)$$

(în mulţimea numerelor complexe acest lucru se poate face totdeauna căci un polinom are totdeauna rădăcini). Atunci, cum se poate arăta

$$R = R(f_1, f_2) = a_1^m a_2^m (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \alpha_2)\ldots(\gamma_1 - \gamma_2) \qquad (8)$$

unde produsele se iau după toate perechile de rădăcini ale lui f_1 şi f_2 (adică sînt mn factori). Verificaţi că în problema noastră $R = (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_2)$ şi gîndiţi-vă cum se poate cu ajutorul acestei expresii a lui R exprimată prin rădăcini, să se rezolve problema în alt mod (rădăcinile pot fi şi complexe). Din egalitatea (8) rezultă următoarea egalitate pe care am şi întîlnit-o într-un caz particular:

$$R = a_1^m f_2(\alpha_1) f_2(\beta_1)\ldots f_2(\gamma_1) = (-1)^{mn} a_2^n f_1(\alpha_2) f_1(\beta_2)\ldots f_1(\gamma_2).$$

Principala proprietate a rezultantului, ţinînd cont şi de rădăcini complexe poate fi formulată astfel: $R = 0$ atunci şi numai atunci cînd f_1 şi f_2 au rădăcină comună.

M 107. *a) Se dă un poligon convex $A_1A_2\ldots A_n$ (figura 171). Pe latura A_1A_2 se iau punctele B_1 şi D_2, pe latura A_2A_3 punctele B_2 şi D_3... pe latura A_nA_1 punctele B_n şi D_1 astfel încît dacă se construiesc paralelogramele $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, ..., $A_nB_nC_nD_n$, atunci dreptele A_1C_1, A_2C_2, ..., A_nC_n se intersectează într-un punct. Să se demonstreze că*

$$A_1B_1 \cdot A_2B_2 \ldots A_nB_n = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \ldots A_nD_n.$$

b) Să se demonstreze că pentru un triunghi este adevărată şi afirmaţia reciprocă: dacă pe latura A_1A_2 s-au ales punctele B_1 şi D_2 pe latura A_2A_3 punctele B_2 şi D_3, pe latura A_3A_1 punctele B_3 şi D_1 astfel încît

$$A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B_3 = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot A_3D_3$$

atunci, dacă se construiesc paralelogramele $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$, dreptele A_1C_1, A_2C_2 şi A_3C_3 sînt concurente.

V.L. Gutenmaher

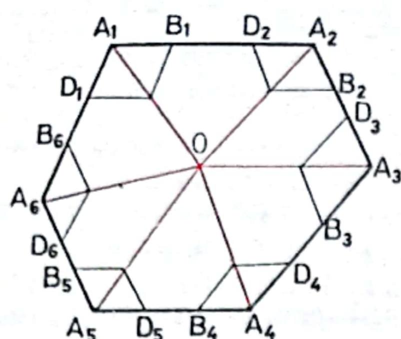


Fig. 171

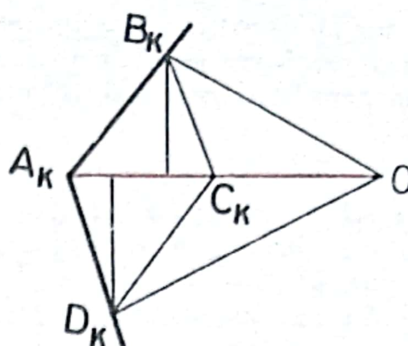


Fig. 172

a) Fie O punctul de concurență. Scriem egalitatea pe care trebuie să o demonstrăm astfel:

$$\frac{A_1B_1 \cdot A_2B_2 \ldots A_{n-1}B_{n-1} \cdot A_nB_n}{A_2D_2 \cdot A_3D_3 \ldots A_nD_n \cdot A_1D_1} = 1.$$

Acum observăm că rapoartele segmentelor $\frac{A_1B_1}{D_2A_2}$, $\frac{A_2B_2}{D_3A_3}$, ..., $\frac{A_nB_n}{D_1A_1}$ sînt respectiv egale cu rapoartele ariilor triunghiurilor următoare:

$$\frac{S(A_1B_1O)}{S(D_2A_2O)}, \quad \frac{S(A_2B_2O)}{S(D_3A_3O)}, \ldots, \frac{S(A_nB_nO)}{S(D_1A_1O)}$$

astfel încît relația căutată se poate scrie astfel,.

$$\frac{S(A_1B_1O) \cdot S(A_2B_2O) \ldots S(A_{n-1}B_{n-1}O) \cdot S(A_nB_nO)}{S(A_2D_2O) \cdot S(A_3D_3O) \ldots S(A_nB_nO) \cdot S(A_1B_1O)} = 1$$

sau (aranjînd factorii numitorului)

$$\frac{S(A_1B_1O) \cdot S(A_2B_2O) \ldots S(A_nB_nO)}{S(A_1D_1O) \cdot S(A_2D_2O) \ldots S(A_nD_nO)} = 1.$$

Dar ultima egalitate este evidentă. Într-adevăr, ariile triunghiurilor A_iB_iO și A_iD_iO pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$ sînt egale întrucît ele au cîte o latură comună A_iO și înălțimi congruente (fig. 172). Înălțimile coborîte din vîrfurile B_i și D_i pe latura A_iO sînt congruente pentru că diagonala A_iC_i împarte paralelogramul $A_iB_iC_iD_i$ în două triunghiuri congruente.

b) Teorema inversă se poate deduce din cea directă. Fie P punctul de concurență a dreptelor A_1C_1 și A_2C_2. Să presupunem că dreapta A_3P nu trece prin punctul C_3. Atunci ea va intersecta una dintre laturile B_3C_3 sau D_3C_3 ale paralelogramului $A_3B_3C_3D_3$ să zicem D_3C_3 în punctul C_3' (figura 173). Luăm pe latura A_3A_1 un punct B_3' astfel încît $A_3B_3'C_3'D_3$ să fie paralelogram. Acum, conform teoremei directe $A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B_3' = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot A_3D_3$ pe de o

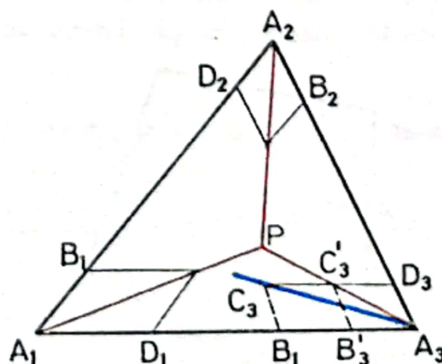


Fig. 173

parte, iar pe de altă după ipoteză $A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B_3 = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot A_3D_3$, de aceea $A_3B'_3 = A_3B_3$ prin urmare, presupunerea noastră că punctele C_3 şi C'_3 şi prin urmare B_3 şi B'_3 nu ar coincide, nu e adevărată.

B.L. Gutenmaher

M 108. *a) Să se demonstreze că dreapta care împarte un triunghi dat în două poligoane de arii egale şi perimetre egale trece prin centrul cercului înscris în acest triunghi.*

b) Să se demonstreze o afirmaţie analoagă pentru un poligon oarecare care admite un cerc înscris.

Iu. I. Ionin

Rezolvăm direct problema b). Presupunem că o dreaptă intersectează conturul unui poligon circumscris unui cerc cu centrul în O, în punctele P şi Q, care separă perimetrul poligonului în două părţi egale. Atunci segmentele OP şi OQ împart acest poligon în două poligoane echivalente (pentru a ne convinge de acest lucru, este suficient să unim punctul O cu toate vîrfurile poligonului şi să observăm că înălţimile tuturor triunghiurilor formate, duse din vîrful O, sînt razele cercului înscris). Dar dacă şi dreapta PQ împarte poligonul în două părţi echivalente, atunci punctul O trebuie să fie situat pe segmentul PQ (altfel apare triunghiul OQP „în plus") (vezi figura 174).

Acelaşi raţionament permite să se demonstreze un fapt ceva mai general: dreapta care intersectează un poligon circumscris, împarte aria sa şi perimetrul său în acelaşi raport, atunci şi numai atunci cînd trece prin centrul cercului înscris.

Iubitorilor inegalităţilor geometrice le propunem să studieze chestiunea: cîte drepte care împart în două părţi egale aria şi perimetrul unui triunghi cu laturile a, b şi c există?

Răspuns. Fie $a \geqslant b \geqslant c$, $a + b + c = 2p$. Atunci pentru $2ab \geqslant p^2$ există o singură dreaptă cu proprietatea cerută, dacă $2ab = p^2$, atunci există două drepte, dacă $2ab < p^2$, sînt trei drepte.

Indicaţie. Ducem prin centrul O al cercului înscris o dreaptă, o rotim în jurul lui şi vedem în ce parte a ei se află bucata cea mai mare din suprafaţă (sau, ceea ce este acelaşi lucru, din perimetru); în figură, 175, pentru cele şase poziţii ale dreptei — după bisectoare şi perpendiculare pe ele — săgeata arată în ce parte este bucata mai mare a triunghiului (înainte de a verifica acest lucru, demonstraţi că bisectoarele împart totdeauna unghiul complet din jurul lui O în şase unghiuri ascuţite). Sînt importante aceste poziţii întrucît

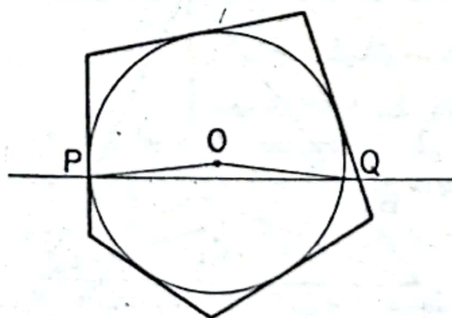


Fig. 174

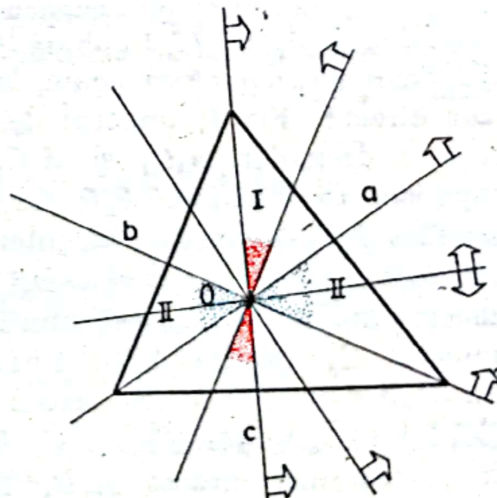


Fig. 175

în intervalele dintre ele, valoarea ariei (perimetrului) situată de o parte (într-un semiplan şi deci şi în cealaltă, variază monoton. După aceasta, se înţelege uşor că în sectorul (I) este o dreaptă cu proprietatea cerută (pentru orice $a \geqslant b \geqslant c$) şi în fiecare dintre celelalte notate cu (II), încă cîte una, dacă $2ab < p^2$.

În ceea ce priveşte un poligon cu $n > 3$, numărul dreptelor poate să fie chiar infinit, iar dacă poligonul nu admite un cerc înscris, se poate întîmpla ca ele să nu treacă prin acelaşi punct (de exemplu, într-un trapez isoscel cu bazele a şi b se poate alege lungimea laturilor neparalele astfel încît să existe o dreaptă paralelă cu bazele care să împartă în două şi aria şi perimetrul; în afară de aceasta, de aceeaşi proprietate se bucură toate dreptele care trec prin mijlocul liniei mijlocii şi intersectează bazele trapezului).

Se poate demonstra, bazîndu-ne pe considerente „de continuitate" că pentru orice poligon convex (şi în general pentru orice figură convexă) există cel puţin o dreaptă care împarte în două părţi egale aria şi perimetrul său. La început, e evident că, dacă mişcăm o dreaptă perpendiculară pe o direcţie fixată Ox, va exista un moment (unic) cînd ea va împărţi în două părţi egale aria şi alt moment în care va împărţi în părţi egale perimetrul. Fie x_s şi x_p coordonatele respectivelor puncte pe axa Ox. Acum, păstrînd punctul O fix, vom roti în jurul său axa Ox de unghi φ $(0 < \varphi < \pi)$ (figura 176). Pentru fiecare poziţie a axei Ox, deci pentru fiecare valoare a unghiului φ putem să determinăm numerele $x_S(\varphi)$ şi $x_P(\varphi)$. Este evident că fiecare dintre funcţiile x_s şi x_p depinde de φ „continuu", iar pentru $\varphi = 0$ şi $\varphi = \pi$, fiecare dintre ele ia valori egale în valoare absolută dar de semne contrare (pentru că axa Ox în aceste situaţii apare în sensuri diferite). Prin urmare pentru o anumită valoare intermediară $\varphi = \varphi_0$ valorile lui x_S şi x_P trebuie să devină egale. Aceasta şi este proprietatea principală a „continuităţii" pe care am folosit-o.

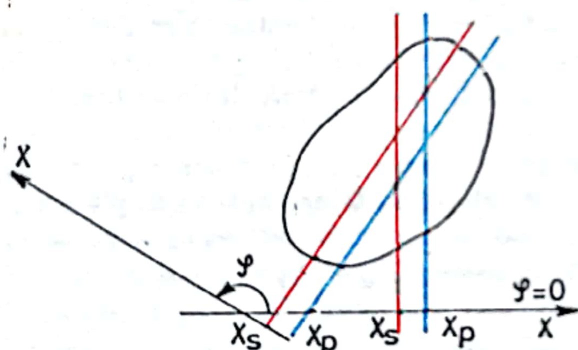


Fig. 176 Liniile trasate cu roşu împart în jumătate suprafaţa, celelalte perimetrul.

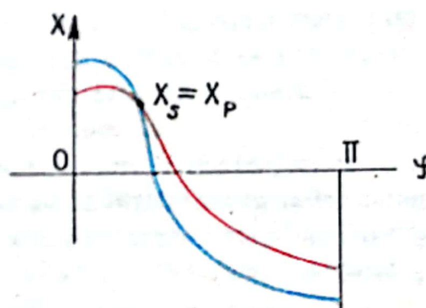


Fig. 177. Cele două curbe continue trebuie să se interesecteze.

M 109. *a) În vîrful A_1 al unui dodecagon regulat $A_1A_2A_3...A_{12}$ se pune semnul minus, iar în celelalte plus. Se hotărăşte să se schimbe semnele deodată în oricare şase vîrfuri consecutive ale poligonului. Să se demonstreze că nu se poate obţine situaţia, după oricîte astfel operaţii, ca în vîrful A_2 să fie semnul minus, iar în celelalte semnul plus.*

b) Demonstraţi aceeaşi afirmaţie dacă se hotărăşte să se schimbe semnele nu în şase ci în patru vîrfuri consecutive ale poligonului.

c) Demonstraţi aceeaşi afirmaţie dacă se schimbă deodată semnele în trei vîrfuri consecutive ale poligonului.

Începem cu problema c). Împărţim cele 12 vîrfuri în trei grupe de cîte patru vîrfuri în fiecare: în prima grupă, vîrfurile cu numerele 1, 4, 7, 10, într-a doua cele cu numerele 2, 5, 8, 11, iar în a treia, cele cu numerele 3, 6, 8, 12, (vezi figura în care vîrfurile fiecărei grupe formează un pătrat). E clar că orice patru vîrfuri consecutive vom alege, în fiecare dintre cele trei

grupe va fi unul şi numai unul. Astfel, schimbînd semnele la trei vîrfuri consecutive înseamnă că schimbăm numărul minusurilor (în plusuri) în fiecare grupă o dată.

Acum să arătăm că de la situaţia A din fig. 178 nu se poate ajunge la situaţia B. În situaţia A şi în a doua şi în a treia grupă, numărul minusurilor este zero. După prima schimbare de semne, oriunde s-ar produce, în a doua şi a treia grupă a apărut cîte un minus. Apoi după a doua schimbare de semne în fiecare dintre aceste două grupe vor fi 0 sau 2 de minus, apoi 1 sau 3 minusuri, apoi 0,2 sau 4 minusuri, apoi din nou 1 sau 3 minusuri în fiecare, ş.a.m.d. Astfel în aceste două grupe vor fi deodată un număr par sau impar de minusuri. Dar în situaţia B în a doua grupă este 1 minus în a treia, 0. De aceea nu putem să o obţinem din A.

În mod analog se rezolvă punctele a) şi b). Vedeţi ce grupe de vîrfuri este bine să consideraţi în aceste cazuri. Nu mai dăm rezolvarea acestor probleme ci încercăm să examinăm direct o problemă mai generală.

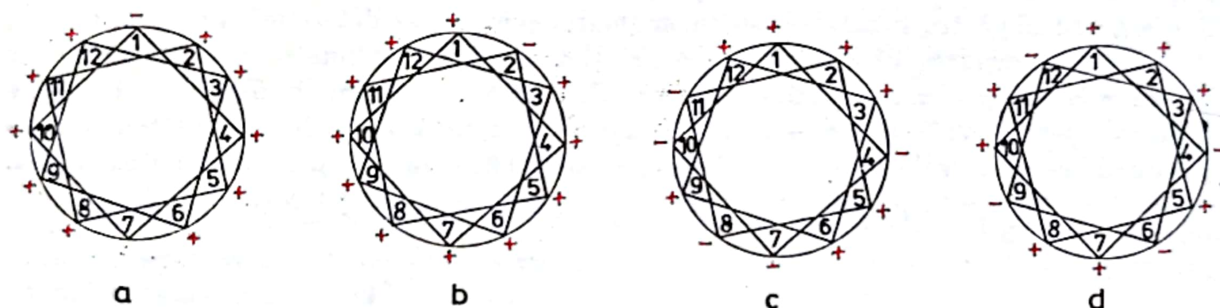


Fig. 178

Presupunem că în vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi sînt scrise plusuri şi minusuri şi se stabileşte să se schimbe semnele deodată în orice k vîrfuri consecutive (n şi k sînt numere naturale date $k < n$); ce grupări de semne se pot obţine din situaţia dată şi care nu?

Să considerăm întîi un caz particular care generalizează problemele a), b), c). n se divide prin k.

Fie $n = kn_1$. Împărţim toate cele n vîrfuri în k grupe astfel încît în fiecare grupă să fie cuprinse cele n_1 vîrfuri ale unui poligon regulat cu n_1 laturi. Fiecărei situaţii de aranjare a plusurilor şi a minusurilor îi punem în corespondenţă gruparea $y = (y_1, y_2 \dots \dots, y_n)$, unde

$$y_i = \begin{cases} 0 \text{ dacă în grupa } i \text{ este un număr par de minusuri} \\ 1 \text{ dacă în grupa } i \text{ este un număr impar de minusuri.} \end{cases}$$

E clar că schimbarea semnelor în oricare k vîrfuri consecutive provoacă schimbarea numărului de minusuri în fiecare grupă cu unu, adică din aranjarea căreia îi corespunde gruparea y, se obţine aranjarea căreia îi va corespunde gruparea $\bar{y}$ care se obţine din y prin schimbarea tuturor zerourilor în unităţi şi invers. Vom numi două aranjări x şi x' echivalente ($x \sim x'$) dacă grupările ataşate lor, y, y' sînt sau egale sau opuse (se poate verifica uşor că aceasta este o relaţie adevărată de echivalenţă). (De exemplu, pe figură unde $n = 12$, $k = 3$ aranjarea C este echivalentă cu A şi $B \sim D$.)

Vom demonstra că o aranjare poate să se transforme în alta numai dacă sînt echivalente. Într-un sens acest lucru a fost de fapt demonstrat: din aranjarea X cu gruparea y prin schimbarea semnelor se obţin aranjări cărora le corespund grupările $\bar{y}$, y, $\bar{y}$, y

ş.a.m.d., adică dacă din X se poate obţine X', atunci $X \sim X'$. Să demonstrăm şi reciproca: dacă $X \sim X'$, atunci din poziţia iniţială a semnelor X se poate obţine aranjarea X'. E clar că se pot obţine în vîrfurile cu numerele $1, 2, \ldots, n-k+1$ acele semne care le dorim, schimbînd succesiv (dacă e nevoie) semnele în vîrfurile de la 1 la k, apoi de la 2 la $k+1, \ldots$ de la $n-k+1$ la n. Astfel putem să obţinem aranjarea X'' care, în primul rînd, coincide cu X' în toate vîrfurile, în afară poate de $k-1$ vîrfuri, de la al $n-k+2$ pînă la al n-lea şi al doilea rînd, este echivalentă cu $X'(X'' \sim X'$ pentru că ele sînt echivalente cu X). Dar atunci aranjările X'' şi X' trebuie să coincidă complet. Într-adevăr, întrucît $y_1'' = y_1'$ (semnele în toate vîrfurile primei grupe a aranjărilor X'' şi X' coincid) şi $X'' \sim X'$, atunci $y_1 = y_i'$ pentru toţi $i = 2, 3, \ldots, k$, prin urmare în vîrfurile cu numere de la $n-k+2$ la n, la X'' trebuie să fie aceleaşi semne ca şi la X'.

Afirmaţia am demonstrat-o pentru $n = kn_1$. Din demonstraţie se vede că toată mulţimea aranjărilor de semne posibile se împarte în 2^{k-1} clase cu cîte 2^{n-k+1} elemente fiecare.

Fie acum, $d = c.m.m.d.c. (n, k)$, $n = dn_1$, $k = dk_1$. Atunci se ştie că există astfel de numere întregi x şi y încît $kx - ny = d$. Schimbînd semnele lui x şi y se poate considera că $x \geqslant 0$, iar $kx - ny$ este egal cu d sau $-d$.

Fie k_1 impar. Atunci y poate fi considerat par (altfel se poate înlocui x cu $x + n_1$ şi y cu $y + k_1$). Atunci, dacă schimbăm semnele în primele k vîrfuri apoi în următoarele k vîrfuri apoi în cele care urmează după acestea k vîrfuri ş.a.m.d. de x ori, ca rezultat se schimbă semnul numai în d vîrfuri succesive. După aceasta problema a devenit echivalentă cu cea în care se stabileşte să se schimbe semnele în d vîrfuri succesive.

Fie k_1 par. Atunci y este impar (căci $k_1x - n_1y = 1$). Folosind faptul că $xk - ny = \pm d$ putem să schimbăm semnul la toate vîrfurile, în afară de d, consecutive. Prin urmare putem să păstrăm neschimbat semnul la toate vîrfurile, afară de două distanţate cu d unul de altul. Astfel putem să obţinem orice combinaţie de semne la care în vîrfurile fiecărui poligon regulat cu n_1 laturi să avem aceeaşi paritate de semne minus ca şi în aranjarea iniţială. Se vede uşor că altele nu se pot obţine.

Răspuns. Să facem să-i corespundă fiecărei aranjări de semne gruparea $(x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_\alpha)$ unde x_i sînt 0 sau 1 după cum numărul de minusuri situate în vîrfurile cu numerele $i + d_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n_1 - 1)$ este par sau impar. Atunci, pentru k_1 par, două aranjări de semne pot trece una în alta atunci şi numai atunci cînd grupările lor respective sînt identice, pentru k_1 impar, dacă ele sînt identice sau opuse

N.B. Vasiliev

M 110 *Pe o foaie de hîrtie infinită cu pătrăţele, N pătrăţele s-au înnegrit. Să se demonstreze că din foaia de hîrtie se poate decupa un număr finit de pătrate, astfel încît să fie îndeplinite două condiţii:*

1) toate pătrăţelele negre să fie în pătratele tăiate;

2) în oricare dintre pătratele tăiate K, aria pătrăţelelor negre să fie cuprinsă între 1/5 şi 4/5 din aria lui K.

G.A. Rozenblium

Vom numi admisibile pătratele care sînt înnegrite nu mai mult decît 4/5 şi nu mai puţin decît 1/5. Vom lua un n atît de mare încît să se găsească un pătrat făcut cu liniile reţelei, de latură 2^n care să conţină toate pătrăţelele înnegrite şi aria lor să fie mai mică decît 1/5. Împărţim acest pătrat în patru pătrate congruente. Fiecare pătrat din descompunere va fi înnegrit mai puţin de 4/5. Pătratele care sînt înnegrite mai mult decît 1/5 vor fi admisibile. Restul pătratelor din descompunere care sînt înnegrite cu mai puţin de 1/5 le împărţim din nou în patru pătrate ş.a.m.d. (fig. 179).

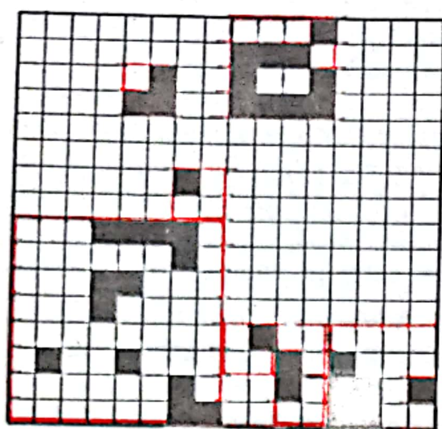


Fig. 179

După a$(n-2)$ — *a* descompunere obținem un număr oarecare de pătrate admisibile de diferite dimensiuni și pătrate 2×2 fiecare dintre ele fiind înnegrit mai puțin de 4/5. Acelea dintre ele care conțin cel puțin o pătrățică neagră, sînt înnegrite mai mult de 1/5 și deci sînt admisibile. Restul pătratelor de 2×2 nu vor conține pătrățele negre prin urmare toate pătrățelele negre sînt situate în pătratele admisibile și astfel s-a realizat cerința problemei.

Problema admite o generalizare la spațiu cu înlocuirea lui 1/5 și 4/5 cu 1/9 și 8/9.

M 111. *Într-un pătrat de latură 1, este situată o figură astfel încît distanța dintre oricare două puncte ale sale nu este 0,001. Să se demonstreze că aria acestei figuri nu depășește 0,34. (Se poate considera că frontiera figurii de care e vorba este formată din segmente de dreaptă și arce de cercuri.)*

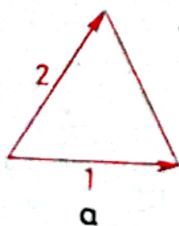
Încercați să obțineți o evaluare mai fină și demonstrați o teoremă analoagă în spațiu.

G.V. Rozenblium

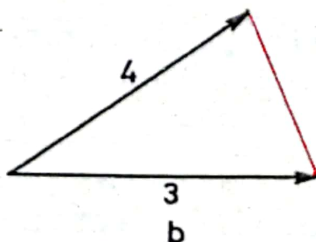
Vom nota prin F figura și prin S aria sa. Considerăm figura F_1, obținută din F printr-o translație cu 0,001 în direcția 1 paralelă cu latura pătratului. Figura F_2 se obține din F printr-o translație cu 0,001 în direcția 2 care face un unghi de 60° cu direcția 1 (vezi fig. 180, a).
Figurile F_1 și F nu au puncte comune. Într-adevăr, să presupunem că punctul A aparține lui F și în același timp lui F_1, adică s-a obținut prin translația unui anumit punct B al figurii F, cu 0,001. Atunci distanța dintre A și B va fi egală cu 0,001 ceea ce contrazice ipoteza problemei. În mod analog, nu se vor intersecta F cu F_2 și F_1 cu F_2. Toate trei figurile considerate au aceeași arie S și sînt situate într-un pătrat cu latura 1,001. De aceea este adevărată inegalitatea $3S < 1{,}001^2$, de unde $S < 0{,}335$.

Această evaluare poate fi întrucîtva îmbunătățită (la a treia și la a patra zecimală) considerînd mai atent partea din figura F care se află în apropierea frontierei pătratului. Dar, vom demonstra o evaluare substanțial îmbunătățită, anume $S < 0{,}287$.

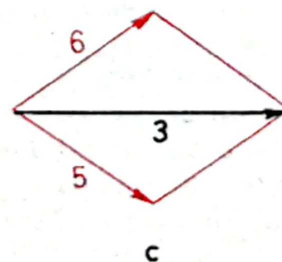
Considerăm figurile F_3 și F_4 obținute din F printr-o translație cu $0{,}001\sqrt{3}$ în două direcții 3 și 4 care formează unghiul $\arcsin \frac{1}{2\sqrt{3}}$. F_4 poate fi obținut din F_3 printr-o translație cu 0,001, de aceea F_3 și F_4 nu se intersectează (fig. 180, b). Alegem dintre aceste figuri pe aceea (de exemplu pe F_3) care



a



b



c

Fig. 180 a) b) c)

are intersecţia cea mai mică cu F. Aria acestei intersecţii nu este mai mare decît $S/2$, de aceea aria totală ocupată de F şi F_3 nu va fi mai mică decît $3S/2$. Vom construi acum figurile F_5 şi F_6 translatînd pe F cu 0,001 în direcţiile 5 şi 6, care formează unghiuri de 30° cu 3 (fig. 180, c). Figura F_3 poate fi obţinută din F_5 printr-o translaţie cu 0,001 în direcţia 6 şi din F_6 cu o translaţie de 0,001 în direcţia 5. De aceea F_5 şi F_6 nu se intersectează nici cu F_3 nici cu F; nu se intersectează nici între ele. Prin urmare aria ocupată de F, F_3, F_5, F_6 nu e mai mică de $7S/2$. Toate aceste figuri trebuie să fie cuprinse într-un pătrat cu latura $1 + 0{,}001\sqrt{3} < 1{,}0018$, deci $S < \frac{2}{7}(1{,}0018)^2 < 0{,}287$. Această evaluare a reuşit să o găsească A. Goldberg (Moscova).

Problema celei mai bune evaluări pînă în prezent a rămas deschisă. Toate exemplele construite au dat pentru S o valoare mai mică decît 0,25.

G.V. Rozenblium

M 112. *Într-un tablou $m \times n$ sînt scrise numere astfel încît, pentru orice două linii şi orice două coloane, suma numerelor situate în vîrfurile opuse ale dreptunghiului format de ele este egală cu suma numerelor situate în celelalte două vîrfuri opuse. O parte dintre numere s-a şters dar după cele rămase se pot reconstitui cele şterse. Să se demonstreze că au rămas cel puţin $n + m - 1$ numere.*

Pentru un matematician ideea demonstraţiei poate fi expusă astfel. Tablourile care satisfac cerinţele problemei formează un spaţiu liniar de dimensiune $n + m - 1$. Pe de altă parte, dacă numerele care stau în unele s căsuţe determină tabloul în mod unic, atunci dimensiunea „spaţiului tablourilor" nu depăşeşte pe s, deci $s \geqslant n + m - 1$.

Trecem acum la o demonstraţie expusă detaliat. Vom conveni să numim numerele din tablou, elementele sale. Vom nota prin a_{ij} elementele tabelei A situate la intersecţia liniei i cu coloana j.

În mod natural se definesc suma şi înmulţirea tablourilor cu un număr.

Adunarea a două tablouri. Dacă ne sînt date tablourile A şi B cu elementele a_{ij} şi b_{ij}, atunci suma lor C ($C = A + B$) se numeşte tabloul cu elementele $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Înmulţirea tabloului cu un număr. Dacă se dă tabloul A cu elementele a_{ij}, atunci tabloul λA este un tablou B cu elementele $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Se verifică uşor că dacă adunăm tablouri care satisfac cerinţa problemei între ele sau dacă le înmulţim cu un număr, atunci tablourile rezultate satisfac din nou cerinţa problemei. Întrucît toate tablourile pe care le vom întîlni mai jos satisfac cerinţa problemei, nu vom mai menţiona special acest lucru.

Vom introduce acum o noţiune foarte importantă: dependenţa liniară. Vom numi tabloul format numai din zerouri, tabloul nul.

Tablourile $A_1, A_2, \ldots, A_r$ se numesc liniar dependente, dacă se pot indica astfel de numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ dintre care nu toate sînt nule astfel încît $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_r A_r$ este tabloul nul.

(De exemplu, dacă printre tablourile $A_1, A_2, \ldots, A_r$ două tablouri sînt identice ($A_i = A_j$) atunci se poate indica o astfel de grupare de numere: $\lambda_i = 1$, $\lambda_j = -1$, şi toţi ceilalţi λ sînt zero.) Dacă pentru tablourile $A_1, A_2, \ldots, A_r$ astfel de numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ nu există ele se numesc liniar independente.

Propunem cititorului să demonstreze că din orice grupare de tablouri $B_1, B_2, \ldots, B_s$ dintre care nu toate sînt nule, se poate găsi o grupare maximă liniar independentă $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_t}$ adică o astfel de grupare încît dacă îi mai adăugăm un singur tablou B_i, ea devine liniar dependentă.

Lungimea grupării maxime liniar independentă este unic determinată de cea aleasă $B_1, B_2, \ldots, B_t$, adică dacă se mai indică încă o grupare liniar independentă maximă $B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_r}$ atunci $r = t$.

Să ne întoarcem acum la problema noastră. Presupunem că au rămas s numere neşterse în tablou şi tabloul s-a reconstituit după ele în mod unic. Să demonstrăm că numai la tabloul nul se poate întîmpla ca cele s numere neşterse să fie zero. Într-adevăr, dacă s-ar găsi un tablou nenul B în care în cele s locuri să fie zerouri, atunci s-ar putea reface nu numai un anumit tablou A ci şi tablourile $A + \lambda B$, unde λ este arbitrar. Dar aceasta contrazice ipoteza problemei.

Să demonstrăm acum că orice $s + 1$ tablouri sînt liniar dependente. Vom lua, pentru aceasta, o oarecare grupare formată din $s + 1$ tablouri. Le vom nota prin $A_1, A_2, \ldots, A_{s+1}$. Dacă unul dintre aceste tablouri este cel nul, atunci este demonstrat. În caz contrar, în tabloul A_{s+1} în unele din cele s căsuţe, de exemplu în căsuţa s_1, nu e un zero. De aceea se pot alege astfel de numere $\lambda_{1,s+1}, \lambda_{2,s+1}, \ldots, \lambda_{s,s+1}$ încît în tablourile $B_1 = A_1 - \lambda_{1,s+1} A_{s+1}$, $B_2 = A_2 - \lambda_{2,s+1}A_{s+1}, \ldots, B_s = A_s - \lambda_{s,s+1}A_{s+1}$ în căsuţa s_1 să fie zero. Dacă tabloul B_s este nul, atunci totul este demonstrat. În caz contrar, în una dintre căsuţele noastre, de exemplu, în căsuţa s_2 din tabloul B_s nu e zero. De aceea, din nou se poate alege o grupare de numere $\lambda_{1,s}, \lambda_{2,s}, \ldots, \lambda_{s-1,s}$ încît în tablourile $C_1 = B_1 - \lambda_{1,s}B_s$, $C_2 = B_2 - \lambda_{2,s}B_s, \ldots, C_{s-1} = B_{s-1} - \lambda_{s-1,s}B_s$, în căsuţa s_2 să fie un zero. Dacă tabloul C_{s-1} nu este cel nul, atunci mai facem un pas ş.a.m.d. După fiecare pas, numărul zerourilor din căsuţele noastre creşte cu unu. Astfel, fie că obţinem după un număr de paşi tabloul nul, fie că parcurgem s paşi şi obţinem un tablou în care în toate căsuţele sînt zerouri, deci din nou tabloul nul. Se vede uşor că tabloul nul obţinut poate fi scris astfel:

$$A_i + \mu_i A_{i+1} + \mu_2 A_{i+2} + \ldots + \mu_{s+1-i} A_{s+1}.$$

De aceea tabelele $A_1, A_2, \ldots, A_{s+1}$ sînt liniar dependente şi e suficient acum să indicăm $n + m - 1$ tablouri liniar independente. Într-adevăr, dacă acest lucru se reuşeşte, atunci după cele demonstrate $s \geqslant n + m - 1$ şi chiar această inegalitate trebuie să o demonstrăm.

Să indicăm $n + m - 1$ tablouri liniar independente, este simplu. Se pot lua, de exemplu, următoarele tablouri. Tabloul $A_{k,1}$ unde $k = 2, 3, \ldots, m$ cu elementele $a_{k,j} = 1$ şi restul elementelor egale cu zero. Tablourile $A_{1,p}$ unde $p = 2, 3, \ldots, n - 1$ cu elementele $a_{j,p} = 1$ şi restul elementelor egale cu zero şi tabloul $A_{1,1}$ în care $a_{1,1} = 1$, $a_{1,j} = 0$, $a_{i,1} = 0$ pentru $i, j > 1$ şi $a_{i,j} = -1$ pentru $i, j > 1$ (vezi figura 181). Faptul că aceste tablouri sînt liniar independente, veţi demonstra uşor singuri. Rezolvarea este terminată,

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$A_{k,1}$

0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0

$A_{1,p}$

1	0	0	0	0	0	0
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1

$A_{1,1}$

Fig. 181

M 113. *Să se demonstreze că pentru orice număr natural n se găseşte un număr format numai din cifrele 1 şi 2 care se divide prin* 2^n.

B.M. Ivlev

Vom demonstra că numere diferite formate din n cifre de 1 şi 2, dau la împărţirea prin 2^n resturi diferite.

Într-adevăr, dacă două astfel de numere cu n cifre a_n şi b_n dau acelaşi rest atunci trebuie să fie sau ambele pare sau ambele impare. Deci ele trebuie să aibă ultimele cifre identice şi deci pot fi scrise astfel: $a_n = 10a_{n-1} + i$, $b_n = 10b_{n-1} + i$, unde i este egal cu 1 sau 2 şi a_{n-1} şi b_{n-1} sînt numere cu $n - 1$ cifre formate din 1 şi 2. Pentru că $a_n - b_n$ se divide prin 2^n rezultă că $10(a_{n-1} - b_{n-1})$ de asemenea se divide prin 2^n prin urmare $a_{n-1} - b_{n-1}$ se divide prin 2^{n-1}. Din această relaţie, se deduce ca mai sus că ultimele cifre ale numerelor a_{n-1} şi b_{n-1} coincid.

Repetînd acest raţionament, ne convingem că toate cifrele numerelor a_n şi b_n coincid, adică am demonstrat că dacă două numere a_n şi b_n dau resturi egale la împărţirea prin 2^n, atunci ele coincid. De aceea rezultă că numerele diferite cu n cifre formate din 1 şi 2 dau resturi diferite la împărţirea prin 2^n. Dar şi aceste numere şi resturile diferite sînt exact în număr de 2^n, deci unul dintre aceste numere dă ca rest la împărţire pe zero, adică el se divide la 2^n.

M 114. *Pe o circumferinţă sînt scrise cîteva numere. Dacă pentru anumite patru numere la rînd a, b, c, d se verifică inegalitatea*

$$(a - d)(b - c) < 0$$

atunci numerele b şi c pot să-şi schimbe locurile. Să se demonstreze că această operaţie poate fi făcută numai de un număr finit de ori.

V.B. Alekseev

Presupunem că pe circumferinţă sînt aranjate numerele $x_1, x_2, \dots, x_n$ x_1 şi x_2 vecini, x_2 şi x_3 vecini, ..., x_n şi x_1 vecini (vezi fig. 182). Considerăm suma produselor perechilor de numere vecine:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1. \quad (1)$$

Vom demonstra că dacă anumite două numere x_i şi $x_{i+1} (x_{n+1} = x_1)$ pot să se permute, atunci după permutarea lor, suma (1) se măreşte. Într-adevăr, dacă x_i şi x_{i+1}se pot permuta, atunci $(x_{i-1} - x_{i+2})(x_i - x_{i+1}) < 0$, dar această inegalitate poate fi scrisă astfel:

$$x_{i-1}x_i + x_ix_{i+1} + x_{i+1}x_{i+2} < x_{i-1}x_{i+1} + x_{i+1}x_i + x_ix_{i+2}.$$

Dar în total există un număr finit de permutări ale numerelor $x_1, x_2, \dots, x_n$ pe cerc de aceea şi suma (1) poate să aibă numai un număr finit de valori. Prin urmare, operaţia noastră se poate face numai de un număr finit de ori: în caz contrar am obţine un şir infinit de valori pentru suma

(1) : $s_1 < s_2 < s_3 < \dots$

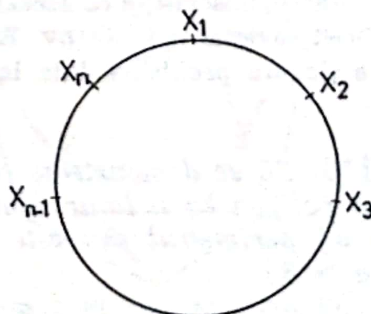


Fig. 182

M 115. *În trei vase s-a turnat cîte un număr întreg de litri de apă. Se hotărăşte ca în oricare vas să se toarne din oricare celelalte vase atîta apă cîtă conţine el. Să se demonstreze că după cîteva astfel de turnări se poate goli complet unul dintre vase. (Vasele sînt suficient de mari; fiecare poate să conţină toată cantitatea de apă.)*

G.A. Galperin

Să presupunem că în primul vas sînt a litri de apă, în al doilea b litri, în al treilea c litri şi $a \leqslant b \leqslant c$.

Vom lămuri întîi cazul cînd $a = 1$. Dacă turnăm apă numai în primul vas, atunci la prima turnare mai punem 1 litru, la a doua 2 litri, la a treia 4 litri, la a i-a turnare 2^{i-1} litri.

Împărţim acum, desigur numai mintal, apa din al doilea vas în porţii: 2^{i_0}, 2^{i_1}, ..., 2^{i_k}, unde $i_0 < i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} < i_k$. (Pentru aceasta vom găsi un i_k astfel încît $2^{i_k} \leqslant b$ şi $2^{i_k+1} > b$, atunci $b = 2^{i_k} + b_1$ unde $b_1 < 2^{i_k}$; pentru el la rîndul său vom găsi 2^{i_k-1} ş.a.m.d.)

Dacă $i_0 = 0$, $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, ..., $i_k = k$, atunci al treilea vas nu ne mai trebuie. Începem să turnăm din al doilea vas în primul. După prima turnare, în primul vas vor fi doi litri, iar într-al doilea $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k$ litri; după a doua, în primul vas 2^2 litri, iar în al doilea $2^2 + \ldots + 2^k$; după a treia, respectiv 2^3 şi $2^3 + 2^4 + \ldots + 2^k$, după a k — a turnare în primul vas vor fi 2^k în al doilea 2^k iar după a $(k+1)$ — a, în primul vas 2^{k+1}, iar în al doilea 0.

Dacă unele puteri ale lui 2 mai mici decît 2^{i_k} lipsesc dintre „porţii" atunci aceste porţii le luăm din vasul al treilea (în el este destulă apă ca să se poată face acest lucru doar ştim că $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{i_k-1} = 2^{i_k} - 1$ litri de apă sînt mai puţini decît b litri care sînt mai puţini decît c litri.

Vom proceda atunci în felul următor: la fiecare turnare vom folosi acel vas în care se găseşte respectiva porţie. După a $i_k + 1$ turnare, al doilea vas se goleşte.

Cazul general ($a \neq 1$) de fapt nu e mai greu decît acesta. Scriem pe b şi c astfel: $b = b_1 a + b_2$, $c = c_1 a + c_2$, unde b_1, b_2, c_1, c_2 sînt numere naturale şi $b_2 < a$, $c_2 < a$ (această reprezentare este unică). Acum, dacă nu ţinem cont momentan de cantităţile „în plus" b_2 şi c_2 şi luăm pe a ca unitate de măsură, întrucît $b_1 \leqslant c_1$, ca şi în cazul precedent putem proceda astfel: să golim din vasul al doilea $b_1 a$ litri. După aceasta în el au rămas b_2 litri, iar numărul b_2 este mai mic decît a. Astfel vom reuşi ca din vasele cu conţinut în litri de apă $a \leqslant b \leqslant c$, să trecem la vase cu conţinut $a' \leqslant b' \leqslant c'$ litri şi $a > a'$. Repetăm procedura şi vom obţine vase cu o cantitate tot mai mică de litri $a > a' > a''$... Întrucît toate aceste cantităţi se exprimă printr-un număr întreg, rezultă că după un număr finit de paşi, vom obţine un vas gol.

Facem observaţia că această problemă a apărut într-una dintre lucrările cunoscutului algebrist sovietic A.I. Şirşov. Ea i-a servit să construiască o teorie matematică serioasă. Nu e singura problemă dată la Olimpiadă, luată din lucrări matematice remarcabile.

L.G. Limanov

M 116. *Să se demonstreze că dacă se unesc mijloacele laturilor consecutive ale unui poligon cu n laturi convex M, atunci poligonul obţinut are proprietăţile:*

a) perimetrul său este mai mare sau egal cu jumătatea perimetrului lui $M (n \geqslant 3)$.

b) aria sa este mai mare sau egală decît jumătatea ariei lui $M (n \geqslant 4)$.

G.A. Galperin

Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ poligonul dat M, B_k mijlocul laturei $A_{k-1}A_k$ (aici şi mai jos, $k=1, 2, \ldots, n$, şi se subînţelege că $A_{n+1}=A_1$, $A_0=A_n$ ş.a.m.d.), S şi S' ariile, P şi P' perimetrele poligoanelor $A_1A_2 \ldots A_n$ şi $B_1B_2 \ldots B_n$ $n \geqslant 4$.

Observăm că diagonala $A_{k-1}A_{k+1}$ taie din poligon triunghiul $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ în care B_kB_{k+1} este linie mijlocie (fig. 184) de aceea:

Fig. 183

a) $A_{k-1}A_{k+1} = 2B_kB_{k+1}$;

b) $S(\triangle A_{k-1}A_kA_{k+1}) = 4S(\triangle B_kA_k\ B_{k+1})$.

Este clar că dintre toate diagonalele $A_{j-1}A_{j+1}$ (unde $j = 1, 2, \ldots, n; j \neq k$), triunghiul dat $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ este intersectat numai de două: $A_{k-2}A_k$ şi A_kA_{k+2} şi punctele de intersecţie C_k, C_{k+1} ale acestor diagonale cu $A_{k-1}A_{k+1}$ sînt dispuse în aşa ordine încît segmentele $A_{k-1}C_k$ şi $C_{k+1}A_{k+1}$ (şi prin urmare şi triunghiurile $A_{k-1}A_kC_k$ şi $C_{k+1}A_kA_{k+1}$) nu se suprapun unul cu celălalt (fig. 185). Atunci afirmaţia problemei se demonstrează astfel: (suma Σ se ia după toate valorile lui k):

a) $2P' = 2\Sigma B_kB_{k+1} = \Sigma A_{k-1}A_{k+1} > \Sigma A_{k-1}C_k + \Sigma C_{k+1}A_{k+1} =$
$= \Sigma(A_{k-1}C_k + C_kA_k) > \Sigma A_{k-1}A_k = P$,
(inegalitatea triunghiului pentru $\triangle C_kA_{k-1}A_k$), de unde $P' > P/2$;

b) $4(S - S') = 4\Sigma S(\triangle B_kA_kB_{k+1}) = \Sigma S(\triangle A_{k-1}A_kA_{k+1}) \leqslant 2S$ (întrucît triunghiurile $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ nu acoperă nicăieri poligonul cu mai mult de două straturi) de unde $S' \geqslant S/2$; egalitatea se atinge aici pentru $n = 4$ (în cazul *a*) numai pentru $n = 3$).

Astfel s-a demonstrat că rapoartele P'/P şi S'/S (respectiv pentru $n \geqslant 3$ şi $n \geqslant 4$) sînt cuprinse între limitele 1/2 şi 1. Apare următoarea întrebare naturală: se pot micşora aceste limite cel puţin pentru unele valori ale lui n sau rapoartele P'/P şi S'/S iau (pentru $n > 3$ şi $n > 4$) toate valorile cuprinse între 1/2 şi 1?

Iată cîteva indicaţii de rezolvare a acestei probleme.

Raportul perimetrelor P'/P poate lua pentru $n > 3$ orice valoare cuprinsă în intervalul (1/2, 1). Nu vom demonstra riguros acest lucru ci ne vom mărgini să descriem exemple pentru cazurile în care acest raport se apropie de 1/2 şi de 1. Dacă poligonul $A_1A_2 \ldots A_n$ „degenerează într-un segment" astfel încît două vîrfuri vecine, să zicem A_1 şi A_2 se apropie de un capăt al segmentului şi celelalte de celălalt, atunci raportul P'/P se apropie de 1; dacă poligonul „degenerează într-un segment" astfel încît A_1 şi A_2 vor fi capetele acestui segment, iar celelalte vîrfuri se apropie de mijlocul segmentului, atunci P'/P se apropie de 1/2.

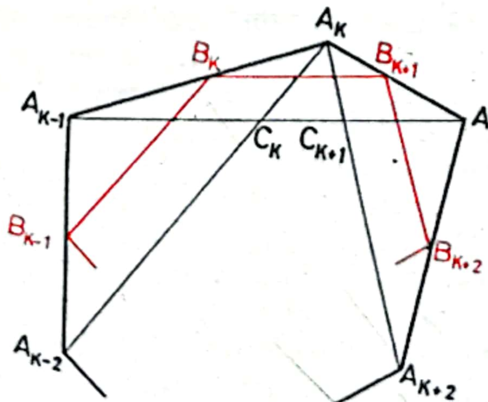


Fig. 184

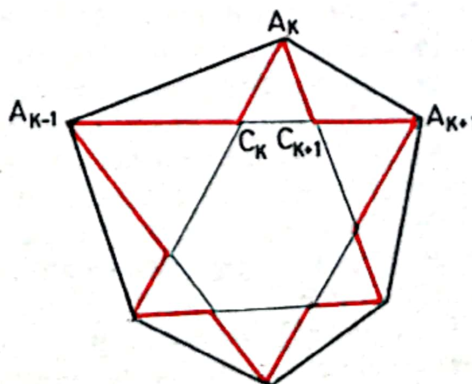


Fig. 185

Raportul ariilor S'/S pentru fiecare $n > 4$ poate fi oricît de apropiat de 1/2: este suficient să ne închipuim că poligonul „degenerează într-un triunghi" astfel încît A_1 şi A_2 să fie vîrfuri ale triunghiului şi toate celelalte vîrfuri ale poligonului să se apropie de al treilea vîrf al triunghiului. Pentru fiecare $n > 5$, raportul poate să se apropie de 1, dacă poligonul „degenerează într-un triunghi" astfel încît A_1 şi A_2 să se apropie de un vîrf, A_3 şi A_4 de altul şi toate celelalte (care sînt cel puţin două) de al treilea. Dar pentru $n = 5$ apropierea de 1 nu se poate realiza. Într-adevăr, aşa cum puteţi demonstra, pentru pentagon $S'/S \leqslant 3/4$.

N.B. Vasiliev

M 117. *Cîţiva oameni au urmărit în cursul a t minute un melc. Fiecare l-a observat exact timp de 1 minut şi a văzut că în acest minut melcul a parcurs exact 1 metru. N-a fost nici un moment în care melcul să nu fi fost urmărit. Care este drumul maxim şi care e cel minim pe care melcul l-ar fi putut parcurge după aceste t minute?*

Încercaţi să rezolvaţi această problemă la început pentru valori mici ale lui t, de exemplu, pentru $t = 2{,}5$.

N.N. Constantinov

Această problemă a apărut din greşala unui student de la facultatea de matematică. Odată a folosit următoarea lemă, considerînd-o evidentă: dacă pe segmentul $[a, b]$ este dată o funcţie $\varphi(x)$, acest segment este acoperit de un număr finit de segmente şi pe fiecare segment al sistemului variaţia funcţiei nu depăşeşte lungimea sa, atunci variaţia funcţiei pe întregul segment $[a, b]$ nu depăşeşte $b - a$. (Variaţia funcţiei, în cazul nostru, este diferenţa dintre cea mai mare şi cea mai mică valoare luată de funcţie pe segmentul respectiv.)

Dacă această lemă ar fi adevărată ar rezulta că melcul nostru nu ar putea parcurge mai mult de t metri. Într-adevăr, aşezăm timpul x pe axa de variaţie a argumentului şi considerăm pe segmentul $0 \leqslant x \leqslant t$ funcţia $\varphi(x)$ care se defineşte ca lungimea drumului parcurs de melc în timpul x. Timpul de observaţie al unui om se reprezintă pe axa Ox ca un segment de lungime *1*. Întregul segment $[0. t]$ este acoperit cu astfel de segmente, pentru că melcul nu a rămas neobservat nici un moment. Atunci, după lemă, drumul parcurs de melc nu ar depăşi (numeric) timpul. Această rezolvare greşită s-a primit de la mai mulţi rezolvitori, ba unii au considerat că viteza melcului este constantă de 1 m/min şi deci a parcurs în t minute, t metri. Dar problema constă chiar în aceea că nici lema nu e adevărată nici afirmaţia privind viteza constantă. De fapt în această contrazicere aparentă a bunului simţ, constă atractivitatea problemei. Cînd s-a stabilit că această lemă nu e adevărată, la ipoteza ei s-a mai adăugat pentru precizare că segmentele de observaţie au toate aceeaşi lungime şi s-a propus această problemă la elevii de clasa a VIII-a la olimpiada matematică din Moscova în anul 1960.

Prima dificultate în această problemă este să se înţeleagă faptul că ipotezele problemei nu contrazic situaţia ca melcul să nu parcurgă t metri. Graficul din figura 186 arată cum trebuie să meargă melcul şi cum trebuie dispuse intervalele de observaţie pentru ca în 2,5 min melcul să parcurgă 4 metri.

Cu ajutorul figurii se poate stabili că e posibilă o astfel de aranjare a observatorilor şi o astfel de mişcare a melcului, încît după t minute (cu condiţia că $t > 1$) melcul să parcurgă $2(t - 1)$ m dacă t este întreg şi $2[t]$ dacă t nu e întreg.

A doua greutate a problemei constă în a arăta că acestea reprezintă deplasările maxime ale melcului.

Fie a_1 primul observator. Să considerăm toţi observatorii care au început să urmărească melcul, fie chiar în momentul în care a terminat a_1, fie ceva mai devreme (după ipoteză, astfel de observatori sînt). Fie a_2 ultimul dintre aceşti observatori. Vom considera mai departe observatorii care au început să urmărească melcul nu mai tîrziu de cînd a încetat a_2 şi notăm prin a_3 pe ultimul dintre aceştia. Analog alegem observatorul a_4 ş.a.m.d. Evident că la sfîrşit ajungem la observatorul care îşi termină observaţia la sfîrşitul ultimului minut (dacă observatorul a_k a încetat mai devreme, înseamnă că există un observator a_{k+1} care a început mai tîrziu decît a_k). Fie $a_1, a_2, \ldots, a_k$ toţi observatorii astfel aleşi. Este clar că observatorii intermediari a_1, a_3, a_5 nu-şi intersectează intervalele de observaţie; la fel, nu se vor intersecta intervalele de observaţie ale observatorilor a_2, a_4, $a_6, \ldots$ Într-adevăr, dacă există un moment în care observă deodată a_1 şi a_3 înseamnă că a_2 nu a fost bine ales căci ar însemna ca a_3 să înceapă să observe mai tîrziu decît a început a_2, dar mai înainte de a termina a_1. Astfel că, întrucît intervalele de observaţie $a_1, a_3, a_5, \ldots$, nu se intersectează, rezultă că în t minute este un număr de mai puţin de t observatori. De aceea, dacă t este întreg, ei nu sînt mai mulţi de $t - 1$, iar dacă t nu este întreg nu sînt mai mulţi de $[t]$. De aceleaşi numere este mărginit numărul observatorilor „din grupa cu soţ“ a_2, a_4, $a_6 \ldots$

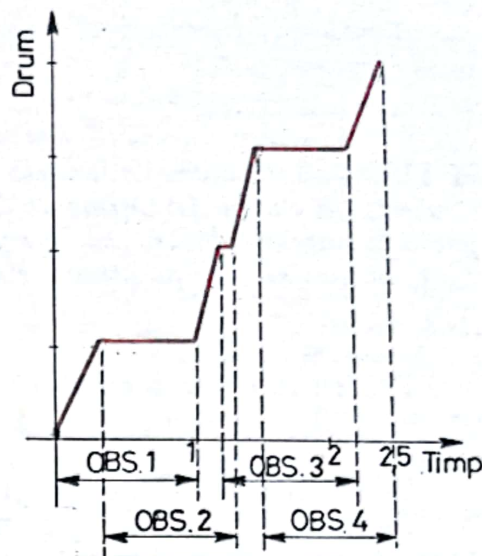


Fig. 186

Melcul nu poate merge mai mult decît suma acestor deplasări, stabilite de toţi observatorii. Dar în condiţiile problemei numărul observatorilor nu e limitat de nimic. Acum din mulţimea tuturor observatorilor, alegem o astfel de submulţime care de asemenea să acopere întregul interval de observaţie şi aceasta este mărginită de un anumit număr ($2(t - 1)$ dacă t este întreg şi $2[t]$ dacă t nu e întreg). Acest număr este chiar drumul maxim posibil al melcului.

A treia parte a problemei constă în a se stabili care va fi drumul minim al melcului. Pentru acesta vom considera toţi observatorii „impari“ $a_1, a_3, a_5, \ldots$, ca mai sus şi vom evalua numărul minim al lor. Dacă toate intervalele dintre doi observatori impari vecini sînt mai mici decît 1, atunci numărul observatorilor impari trebuie să fie mai mare decît $\left[\frac{t}{2}\right]$. Aceasta înseamnă că melcul nu ar putea parcurge un drum mai mic decît $\left[\frac{t}{2}\right] + 1$. Acesta este răspunsul la a doua întrebare a problemei. Pe graficul din fig. 187 se arată cum trebuie să se mişte melcul pentru ca acest minim să fie atins.

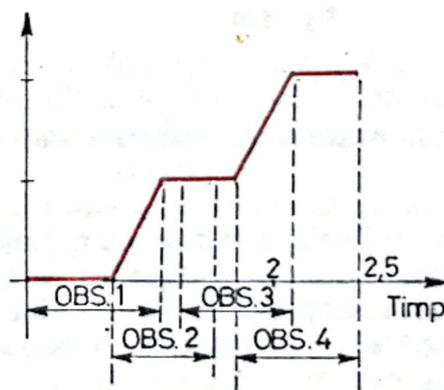


Fig. 187

Problemă. Încercați acum să formulați corect lema din prima parte a textului rezolvării.

N.N. Constantinov

M 118. *Pe cele patru laturi ale unei table de șah de dimensiuni $n \times n$ se construiește un chenar în lățime de două pătrățele. Să se demonstreze că acest chenar poate fi parcurs de un cal de șah, trecînd prin fiecare cîmp o dată și numai o dată, atunci și numai atunci cînd $n - 1$ este multiplu de 4.*

Iu. I. Sorkin și Iu. Iu. Sorkin

Pentru rezolvarea acestei probleme este suficient să arătăm că un chenar de lățime 2 pentru $n = 4t + 1$ poate fi parcurs de cal și pentru $n \neq 4t + 1$ nu poate fi parcurs.

Demonstrația primei părți a acestei afirmații este suficient de vizibilă. Pe figura 188 se arată cum se înconjură chenarul pentru $t = 0$ $(n = 1)$. Așezînd apoi succesiv, cîte patru blocuri 2×4 ca cele reprezentate în figura 189 se poate obține parcursul cerut pentru orice t (pentru $t = 1$ este dat în figura 190).

Pentru demonstrația părții a doua a afirmației, mai grele, ne este utilă următoarea lemă adevărată pentru orice mulțime finită de cîmpuri pe o tablă de șah infinită.

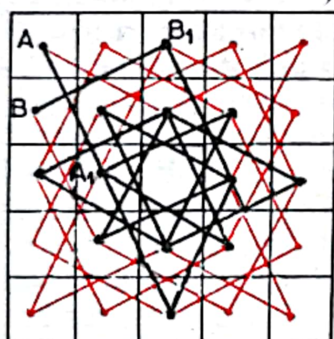


Fig. 188. Cu negru sînt desenate segmentele care arată din fiecare cîmp unde ar putea ajunge calul dintr-o mișcare. Linia roșie arată drumul de la A la B care parcurge toate cîmpurile o singură dată. (Observăm că dacă în locul segmentului A_1B_1 includem în drum segmentele AA_1 și BB_1, atunci el se împarte în două drumuri închise.)

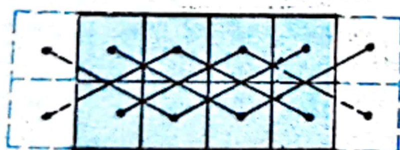


Fig. 189

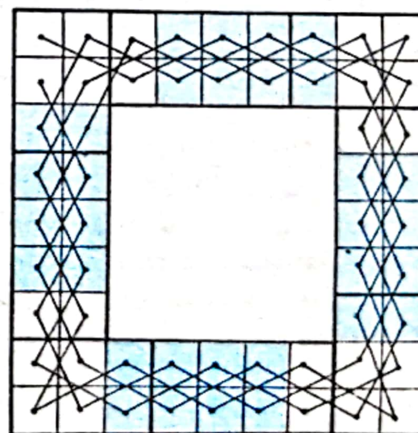


Fig. 190. Blocurile de încadrare sînt desenate cu albastru.

Lemă. **Dacă în mulțimea G formată din g cîmpuri, se pot determina k submulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_k$ care conțin m cîmpuri și**

1) aceste submulțimi nu au cîmpuri comune;

2) de pe nici un cîmp al mulțimii A_i calul nu poate trece pe un cîmp al mulțimii A_j pentru $i \neq j$;

3) $g - m < k - 1$,

atunci mulțimea G nu poate fi parcursă prin mișcarea calului.

Demonstrația lemei este destul de evidentă. Într-adevăr, dacă reușește calul să parcurgă toată mulțimea G atunci pe parcurs el trebuie să parcurgă toate cele k submulțimi. Dar în acest caz, datorită condiției 2) din lemă la trecerea de la o submulțime la alta, calul trebuie ca de cel puțin $k - 1$ ori să iasă din aceste mulțimi, dar în afara lor, după ipoteza 3) a lemei nu se găsesc atîtea cîmpuri. Lema e demonstrată.

Să considerăm trei cazuri: 1) $n = 4t$; 2) $n = 4t + 2$ și 3) $n = 4t + 3$.

Începem cu cazul 3) care este cel mai ușor, cînd $n = 4t + 3$. Vom împărți fiecare chenar în două submulțimi A_1 și A_2, așa cum se arată în figura 191. (Aici $t = 0$, pentru ca să obținem desenul pentru alți t trebuie să încadrăm cu blocuri din cele desenate în figura 189.)

Se vede ușor că din mulțimea A_1 nu se poate trece în mulțimea A_2 prin mișcarea calului. De aceea se poate aplica lema ($k = 2$, $m = g$).

În celelalte cazuri, $n = 4t$ și $n = 4t + 2$, greutatea principală constă în a descrie cîmpurile care nu intră nici într-o submulțime.

Cazul 1) ($n = 4t$). Pentru $t > 0$, cîmpuri neutre vor fi cele care au cîte o latură comună cu cîmpurile din colțurile tablei căruia i se pune chenar. (În fig. 192 acestea sînt notate prin litera Z.) Ele vor fi 8. Submulțimile, care vor fi în număr de 10, se determină în felul următor: vom lua un cîmp neocupat și toate cîmpurile în care se poate ajunge din el cu calul nefolosind cîmpurile neutre. Toate aceste cîmpuri formează o submulțime. Pentru ca din figura 192 să obținem desenul pentru orice $t > 0$, trebuie puse blocurile din figura 189. Pentru $t = 0$ cîmpurile neutre și submulțimile sînt arătate în figura 193.

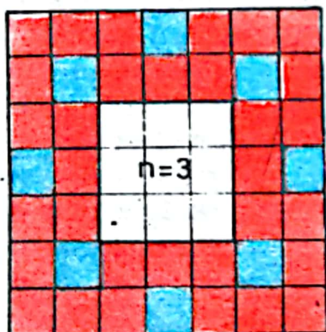


Fig. 191. Pătrățelele roșii sînt în mulțimea A_1, celelalte în A_2

1	9	10	5	6	9	10	2
10	5	Z	9	10	Z	6	9
9	Z					Z	10
5	10					9	6
8	9					10	7
10	Z					Z	9
9	8	Z	10	9	Z	7	10
4	10	9	8	7	10	9	3

n=4

Fig. 192

Cazul 2) ($n = 4t + 2$) se analizează analog. Aici, pentru $t > 0$ numărul cîmpurilor neutre este 12, iar numărul submulțimilor este 14. Cum se aleg cîmpurile neutre pentru $t > 0$ și $t = 0$ se vede din figurile 194 și 195.

Problema M118 este un caz particular al următoarei probleme: se dă un „graf" (un sistem de „vîrfuri" unele dintre ele fiind „unite cu muchii"); trebuie să se găsească un drum care să parcurgă vîrfurile, trecînd prin ele cîte o dată – așa-numitele drumuri hamiltoniene.

Facem observația că în general această problemă nu e rezolvată – nu s-a găsit un algoritm simplu care să permită ca pentru orice graf să se găsească drumurile hamiltoniene și nici să se afirme dacă există un astfel de drum. Problema asemănătoare acesteia, de a găsi un drum care să parcurgă cîte o dată toate muchiile este mult mai simplă.

Iu. Iu. Sorkin

1	5	6	2	
6	Z	Z	5	n=0
5	Z	Z	6	
4	6	5	3	

Fig. 193

1	9	10	Z	3	9
10	2	Z	9	10	4
9	Z	n=2		9	Z
Z	10			Z	10
7	9	10	Z	5	9
10	8	Z	9	10	6

Fig. 195

1	7	8	9	11	7	8	Z	3	7
8	9	Z	7	8	9	Z	7	8	4
7	Z							7	Z
9	8							Z	8
14	7				n=6			10	7
8	9							8	12
7	Z							7	10
Z	8							Z	8
5	7	8	Z	10	7	8	Z	10	7
8	6	Z	7	8	13	10	7	8	2

Fig. 194

M 119. *Să se demonstreze că dacă în fiecare față a unui poliedru convex se alege cîte un punct și se duce din acest punct un vector, perpendicular pe față, îndreptat în spre exterior și de lungime numeric egală cu aria acestei fețe, atunci suma tuturor acestor vectori va fi nulă.*

N.B. Vasiliev

O rezolvare surprinzătoare și scurtă poate fi obținută prin considerente fizice. Să ne închipuim că un vas închis al cărui interior are forma poliedrului nostru este umplut cu gaz sub presiunea P și este așezat în vid (forțele exterioare, greutatea și altele lipsesc). Atunci forța de presiune a gazului pe o față de arie S este egală cu PS și este îndreptată perpendicular pe această față pe partea exterioară (cum se spune „după normala exterioară"). Se poate lua $P = 1$; atunci forțele care acționează asupra fețelor vor fi egale cu vectorii de care este vorba în problemă. Pentru că vasul nu se deplasează cu o anumită accelerație sub acțiunea acestor forțe interioare, rezultă că suma acestor forțe, adică suma vectorilor este nulă.

Vom da și o demonstrație pur matematică (nu vom analiza acum în amănunt interesanta chestiune în ce măsură raționamentul făcut mai sus poate fi considerat „demonstrație riguroasă". Remarcăm că toate noțiunile și legile fizice folosite ar putea fi transpuse în cadrul unei teorii „deductive" matematice; noțiunile ar primi o definiție corectă, legile o demonstrație riguroasă, iar faptele experimentale s-ar considera ca niște confirmări ale utilității definițiilor și teoremelor, dar în cursul școlar de fizică — și nu numai în cel școlar — o astfel de abordare nu este obișnuită. Pentru ca să se realizeze o astfel de „formalizare" a cursului de fizică, cursul școlar de matematică este insuficient. Însă pentru rezolvarea problemei noastre ne ajunge cursul școlar de matematică).

Ne este utilă următoarea lemă (demonstrația sa o vom da la sfîrșitul rezolvării): dacă un poligon are aria S și planul său face cu un anumit alt plan unghiul α ($0° < \alpha < 90°$), atunci aria proiecției acestui poligon pe plan este egală cu $S \cdot \cos \alpha$.

Vom lua o axă arbitrară (dreaptă orientată) l și un plan π perpendicular pe ea. Proiectăm toate fețele poligonului nostru pe planul π, și vectorii lor

corespunzători pe axa l. Dacă aria uneia dintre fețe este egală cu S și unghiul format de „normala exterioară" cu axa l este α, atunci proiecția vectorului pe axa l (cu considerarea semnului) este $S \cdot \cos \alpha$, iar aria proiecției feței pe planul π este $|S \cos \alpha|$. Am scris semnul de modul pentru că unghiul α poate să nu fie unghi ascuțit (fig. 196, a; fețele pentru care $\cos \alpha \geqslant 0$ le numim superioare) ci și obtuze (fig. 196, b; fețele pentru care $\cos \alpha < 0$ le numim inferioare).

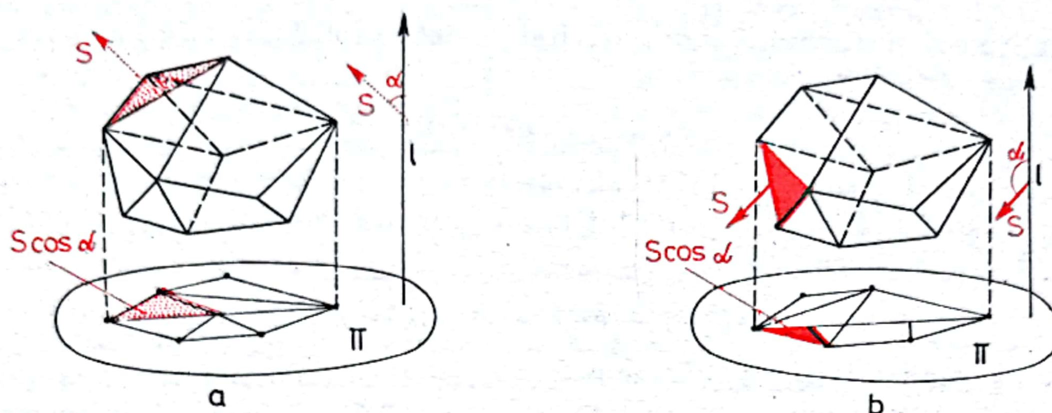


Fig. 196 a) fețele superioare: $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$; b) fețele inferioare: $90° < \alpha \leqslant 180°$

Să considerăm acum poligonul în care s-a proiectat pe planul poliedrul nostru. Acest poligon, așa cum se vede din figura 196, a și b poate să fie format din proiecțiile tuturor fețelor superioare sau poate fi format din proiecțiile tuturor fețelor inferioare. (Aici am folosit faptul că poliedrul este convex, de aceea pe fiecare dreaptă paralelă cu axa l și care intersectează poliedrul se găsesc două puncte, unul aparținînd fețelor superioare și celălalt celor inferioare.) De aceea dacă separăm în numerele $S \cdot \cos \alpha$ pe cele pozitive de cele negative, suma unora și a celorlalte în modul trebuie să fie egale. Prin urmare suma tuturor numerelor $S \cdot \cos \alpha$ corespunzătoare tuturor fețelor este 0. Astfel suma proiecțiilor vectorilor pe axa l ca și însăși proiecția sumei lor pe axa l este egală cu 0. Dar axa l a fost aleasă arbitrar prin urmare suma vectorilor este nulă.

D e m o n s t r a ț i a l e m e i. Dacă $\alpha = 0°$ sau $\alpha = 90°$ este evident. În celelalte cazuri poligonul poate fi descompus în trapeze și triunghiuri ale căror baze să fie paralele cu planul π (pentru aceasta este suficient să se ducă plane paralele cu π prin toate vîrfurile poligonului). Pentru aceste trapeze și triunghiuri afirmația lemei este evidentă, întrucît prin proiecție bazele lor nu se modifică iar înălțimile se înmulțesc cu $\cos \alpha$.

Remarcăm în încheiere că afirmația este adevărată și pentru poliedre neconvexe.

M 120. *Într-o anumită mulțime s-a introdus operația $*$ care pune în corespondență, oricăror două elemente a și b ale acestei mulțimi, elementul $a * b$ din această mulțime. Se știe că*

1) pentru orice trei elemente a, b și c avem

$$a * (b * c) = b * (c * b);$$

2) dacă $a * b = b * c$, atunci $b = c$;
3) dacă $a * c = b * c$, atunci $a = b$.

*Să se demonstreze că operaţia * este:*

a) comutativă, adică pentru orice două elemente a şi b

$$a * b = b * a;$$

b) asociativă, adică pentru orice trei elemente a, b şi c

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

S.A. Ianovskaia

Din condiţiile 1 şi 2 rezultă comutativitatea: înlocuind în 1, a în locul lui b, vom obţine, pentru orice a şi c

$$a*(a*c) = a*(c*a),$$

iar de aici rezultă, conform lui 2, că $a*c = c*a$.

Din condiţia 1 şi din comutativitate rezultă asociativitatea: pentru orice a, b şi c conform lui 1,

$$a*(b*c) = b*(c*a) = c*(a*b)$$

şi, folosind comutativitatea, obţinem

$$a*(b*c) = c*(a*b) = (a*b)*c.$$

Problema e rezolvată. Condiţia 3, aşa cum au observat mulţi cititori, este în plus. Desigur că se poate înlocui în locul lui 2 dacă condiţia 1 este îndeplinită, fiecare dintre condiţiile 2 şi 3 rezultă din cealaltă.

Am văzut că din 1 şi din comutativitate rezultă asociativitatea. Desigur că, dacă operaţia * este comutativă şi asociativă pentru ea, 1 este adevărată. Dar din asociativitate şi din condiţia 1, nu rezultă comutativitatea (adică fără 2 sau 3 nu se poate demonstra comutativitatea). Dăm un exemplu care confirmă aceasta: presupunem că mulţimea este formată din patru elemente 0, 1, 2, 3 şi operaţia * este definită astfel $1 * 2 = 3$, şi pentru toate celelalte perechi de elemente $a * b = 0$ (în particular $2 * 1 = 0$); în acest exemplu $(a * b) * c = a * (b * c) = 0$ pentru orice trei elemente a, b şi c. Iată şi un exemplu care arată că numai din condiţia 1 nu rezultă asociativitatea. În mulţimea formată din trei elemente 0, 1, 2 operaţia * este definită astfel $1 * 2 = 1$ şi $a * b = 0$ pentru toate perechile a şi b. Atunci $a * (b * c) = 0$ pentru orice trei elemente a, b şi c, dar $(1 * 2) * 2 = 1$.

M 121. *Să se demonstreze că pentru orice n numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se găseşte un număr natural $k \leqslant n$, astfel încît fiecare dintre cele k numere*

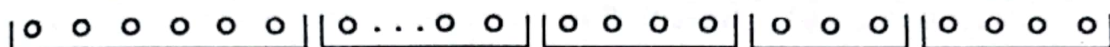
$$a_k, \quad \frac{a_{k-1} + a_k}{2}, \quad \frac{a_{k-2} + a_{k-1} + a_k}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}$$

nu depăşeşte pe $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

Presupunem că nu este aşa. Atunci există astfel de numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, încît pentru orice $k (1 < k \leqslant n)$ se găseşte un j $(0 \leqslant j < k)$, astfel încît $\frac{a_{j+1} + a_{j+2} + \ldots + a_k}{k - j}$ este mai mare decît $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = A$.

În particular, pentru $k = n$ se găseşte $j = n_1$, astfel încît media aritmetică a numerelor de la a_{n_1+1} pînă la n este mai mare decît A. Vom lua acum $k = n_1$ pentru el se găseşte $j = n_2$ $(0 \leqslant n_2 < n_1)$, astfel încît media aritmetică a numerelor de la a_{n_2+1} pînă la a_{n_1} să fie mai mare decît A; dacă $n_2 > 0$, atunci vom lua $k = n_2$ şi găsim pentru el $j = n_3 \ldots$ ş.a.m.d. pînă cînd un

anumit n_{r+1} va fi nul adică media aritmetică respectivă se va lua de la a_1 pînă la a_r (vezi schema de mai jos).



Dar dacă media aritmetică în fiecare grupă este mai mare decît A, atunci și media aritmetică a tuturor numerelor este mai mare decît A (într-adevăr, dacă suma numerelor în prima grupă este mai mare decît $(n - n_1)A$, în a doua mai mare decît $(n_1 - n_2)A$... în ultima mai mare decît n_rA, atunci suma tuturor numerelor este mai mare decît nA). Dar prin A am notat media aritmetică a tuturor numerelor. Contradicția obținută demonstrează că presupunerea noastră nu este adevărată.

Se poate da și o altă rezolvare. De exemplu, este util să scădem din fiecare dintre numerele date, mărimea A (media lor aritmetică). Atunci problema se reduce la un caz particular în care media aritmetică a tuturor numerelor este egală cu zero. Atunci se pot elimina numitorii și să nu se mai vorbească de medii ci de sumele numerelor cu semnele lor și problema devine o simplă consecință a următoarei probleme: dacă pe un cerc se scriu mai multe numere astfel ca suma lor să fie nulă, atunci se găsește printre ele un număr, astfel încît să nu fie negativ, suma sa cu următorul, în sensul acelor ceasului, să nu fie negativă, suma lui cu următorii doi să nu fie negativă ș.a.m.d., pînă la suma tuturor celor n numere. Despre această problemă, în altă formulare, a mai fost vorba în **M 82**.

M 122. *Un pentagon $ABCDE$ este înscris într-un cerc. Se știe că distanțele de la punctul E la dreptele AB, BC, CD sînt egale respectiv cu p, q, r. Să se găsească distanța de la punctul E la dreapta AD.*

Dacă este dat un cerc și pe el două puncte P și Q, atunci prin $s(PQ)$ vom nota sinusul unghiului înscris care cuprinde arcul PQ (întrucît $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$ nu contează care dintre arcele PQ le considerăm).

Ne sînt utile următoarele două lucruri.

1. Fie PQ o coardă a cercului de rază R. Atunci $PQ = 2Rs(PQ)$.

2. Dacă P, Q și E sînt trei puncte diferite ale cercului de rază R atunci distanța de la punctul E la dreapta PQ este egală cu $2Rs(EP)s(EQ)$.

Afirmația 1 este binecunoscută (din ea se obține în mod obișnuit „teorema sinusurilor" pentru un triunghi), iar 2 se obține ușor din 1 calculînd în două moduri aria triunghiului PQE. Dacă α este unghiul din vîrful E al acestui triunghi, h înălțimea dusă din acest vîrf, atunci dublul ariei este egal cu $h \cdot PQ = EP \cdot EQ \cdot \sin\alpha$, de unde, ținînd cont că $EP = 2Rs(EP)$, $EQ = 2Rs(EQ)$, $PQ = 2Rs(PQ) = 2R\sin\alpha$, obținem $h = 2Rs(EP)s(EQ)$.

Acum cerința problemei se rezolvă imediat: după ipoteză

$$p = 2Rs(EA)s(EB),$$
$$q = 2Rs(EB)s(EC),$$
$$r = 2Rs(EC)s(ED),$$

prin urmare distanța de la punctul E la dreapta AD este egală cu

$$2Rs(EA)s(ED) = pr/q.$$

Această problemă s-a propus într-una dintre variantele la proba scrisă la examenul de admitere la facultatea de fizică a Universității de Stat din Moscova (ea a fost cea mai dificilă).

N.B. Vasiliev

M 123. *Să se găsească toate numerele naturale m, pentru care*

$$1!3!5!\dots(2m-1)! = \frac{m(m+1)}{2}!$$

(prin n! se notează produsul 1.2.3....n).

V.P. Beşkarev

Soluţiile ecuaţiei sînt numerele 1, 2, 3, 4. Ne convingem uşor de acest lucru prin verificare directă. Să demonstrăm că alte soluţii nu sînt. Demonstraţia simplă pe care o propunem se bazează pe teorema cunoscută sub numele de „postulatul lui Bertrand": între numerele a şi $2a$, unde $a > 1$, se găseşte totdeauna cel puţin un număr prim.

Fie p numărul prim care se găseşte între $2x - 1$ şi $2(2x - 1)$. Dacă ar fi îndeplinită inegalitatea

$$2(2x-1) < \frac{x(x+1)}{2},$$

atunci s-ar obţine că numărul p intră în descompunerea în factori primi a membrului drept a ecuaţiei, fiindcă este mai mic decît $\frac{x(x+1)}{2}$ şi în acelaşi timp nu poate intra în descompunerea membrului stîng, fiindcă este mai mare decît $2x - 1$. Dar acest lucru e imposibil, datorită teoremei unicităţii descompunerii în factori primi. De aceea, în mod obligatoriu

$$2(2x-1) > \frac{x(x+1)}{2}.$$

Din această condiţie găsim $x \leqslant 6$. Dar $x = 5$ şi $x = 6$ nu satisfac ecuaţia.

V.P. Beşkarev

M 124. *Se dă triunghiul ABC. Să se găsească un punct O în interiorul său, avînd următoarea proprietate: pentru orice dreaptă care trece prin punctul O şi care intersectează latura AB în punctul K şi BC în L, se verifică egalitatea*

$$\frac{AK}{KB} + \frac{CL}{LB} = 1.$$

În general, să se demonstreze că dacă p şi q sînt două numere pozitive, arbitrare date, atunci în interiorul triunghiului ABC se poate găsi un punct O astfel încît pentru orice dreaptă KL care trece prin acest punct (K pe AB, L pe BC), să existe relaţia

$$p\frac{AK}{KB} + q\frac{CL}{LB} = 1.$$

G. Noten (elev cl. a X-a)

Această problemă se rezolvă cel mai simplu, folosind noţiunea de centru de greutate. În demonstraţie vom folosi următoarea proprietate a centrului de greutate: dacă într-un sistem format din n corpuri $p_1, p_2, \dots, p_n$ înlocuim două dintre ele p_1 şi p_2 prin corpul $p = p_1 + p_2$ situat în centrul lor de greutate atunci poziţia centrului de greutate al sistemului nu se schimbă.

Să aşezăm în vîrfurile A, B şi C ale triunghiului, trei corpuri a, b, c de masă unitară. Atunci centrul de greutate este situat la intersecţia medianelor. Vom lua acum punctul K, pe latura AB astfel încît $\frac{AK}{KB} \leqslant 1$, şi-l vom

descompune pe b în suma a două corpuri de mase $b_1 = \frac{AK}{KB}$ şi $b_2 = 1 - \frac{AK}{KB}$. Centrul de greutate al maselor a şi b_1 se găseşte în punctul K. Atunci, dacă L este centrul de greutate al corpurilor c şi b_2, avem $\frac{CL}{LB} = 1 - \frac{AK}{KB}$, iar centrul de greutate al corpurilor a, b şi c va fi situat după cum decurge din proprietatea de mai sus pe dreapta KL. De aceea, pentru orice dreaptă care trece prin punctul O şi intersectează laturile AB şi BC, se verifică egalitatea cerută de problemă.

În mod analog se demonstrează că dacă O' este centrul de greutate al corpurilor $a = p$, $b = 1$ şi $c = q$, atunci pentru orice dreaptă care trece prin punctul O' şi intersectează laturile AB şi BC ale triunghiului, se va verifica a doua egalitate din textul problemei. Într-adevăr, să luăm pe latura AB punctul K pentru care $\frac{AK}{KB} \leqslant \frac{1}{p}$ şi să ne închipuim corpul b descompus într-o sumă de două corpuri de mase $b_1 = p\frac{AK}{KB}$ şi $b_2 = 1 - p\frac{AK}{KB}$. Atunci, dacă L este centrul de greutate al corpurilor de mase c şi b_2, rezultă $1 - p\frac{AK}{KB} = q\frac{CL}{LB}$ şi punctele O', K şi L sînt situate pe aceeaşi dreaptă.

Demonstraţia este terminată.

L.G. Makarov.

M 125. *a) Există un şir infinit de numere naturale care să aibă următoarea proprietate:*
nici unul dintre aceste numere nu se divide la altul dar printre oricare trei numere se găsesc două a căror sumă se divide la al treilea?

b) Dacă nu, atunci cîte numere pot fi într-o grupare care are această proprietate?

c) Rezolvaţi această problemă cu o condiţie suplimentară: în grupare să se ia numai numere impare.

Iată un exemplu de o astfel de grupare formată din patru numere: 3, 5, 7, 107. Aici, în tripletul 3, 5, 7, suma 5 + 7 se divide prin 3, în tripletul 5, 7, 107 suma 107 + 5 se divide prin 7; în tripletul 3, 7, 107 suma 7 + 107 se divide prin 3, şi în sfîrşit în tripletul 3, 5, 107 suma 3 + 107 se divide prin 5.

Iu. I. Ionin

Vom rezolva la început punctul c). La cele patru numere date ca exemplu se mai poate adăuga al cincilea număr 10693, 10693 + 5 se divide prin 3, 10693 + 3 se divide prin 7, 10693 + 7 se divide prin 5, 10693 + 107 se divide prin 3 şi prin 5, 10693 + 7 se divide prin 107.

Vom demonstra că din şase numere impare nu se poate face o grupare care să satisfacă cerinţa problemei. Fie a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 numere impare astfel încît nici unul dintre ele nu se divide prin altul, dar printre oricare trei dintre ele se găsesc două a căror sumă se divide prin al treilea.

Vom face cîteva observaţii premergătoare.

1. Dacă a, b, c sînt trei termeni din şirul nostru cu $a > b > c$, atunci $b + c$ nu se divide prin a.

Într-adevăr, $b + c < 2a$ şi $b + c \neq a$ fiindcă a este număr impar.

2. Dacă a, b sînt doi termeni ai şirului nostru, cu $a > b$, atunci $a + b$ se divide la toţi termenii şirului mai mici decît b, cu excepţia poate a unuia.

Într-adevăr, dacă $a + b$ nu s-ar divide la două numere c şi d mai mici decît b, atunci $a + c$ şi $a + d$ se divid prin b, dar atunci $c - d$ se divide prin b ceea ce este imposibil.

3. Dacă a, b, c, d sînt patru numere ale şirului nostru, $a + b$ şi $a + c$ se divid la d, atunci $b + c$ nu se divide la d.

Într-adevăr, fiindcă $a + b$ şi $a + c$ se divid la d, atunci $2a + (b + c)$ se divide la d în timp ce $2a$ nu se divide la d (d este număr impar şi a nu se divide la d).

Fie $a_1 > a_2 > a_3$ cele trei numere mai mari dintre cele şase $a_1, a_2, \ldots, a_6$.

Fiecare dintre numerele $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$, $a_2 + a_3$, conform observaţiei 2, se divide cel puţin la două dintre numerele a_4, a_5, a_6. În acelaşi timp, observaţia 3 arată că aceste numere nu au printre a_4, a_5, a_6, divizor comun. Prin urmare, fiecare dintre numerele $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$, $a_2 + a_3$ se divide la două dintre numerele a_4, a_5, a_6 şi nu se divide la al treilea.

Fie

$a_1 + a_2$ să se dividă la a_4 şi a_5 şi să nu se dividă la a_6;
$a_1 + a_3$ să se dividă la a_4 şi a_6 şi să nu se dividă la a_5;
$a_2 + a_3$ să se dividă la a_5 şi a_6 şi să nu se dividă la a_4.

Atunci numerele $a_1 + a_5$ şi $a_2 + a_4$ se divid la a_3. Prin urmare, la a_3 se divide şi numărul $(a_1 + a_2) + (a_4 + a_5)$.

În acelaşi timp $a_1 + a_2$ se divide la trei dintre numerele a_3, a_4, a_5, a_6 şi fiindcă $a_1 + a_2$ nu se divide la a_6, atunci $a_1 + a_2$ se divide la a_3, de unde rezultă că $a_4 + a_5$ se divide la a_3. Am obţinut o contradicţie cu observaţia 1.

Astfel, un şir de numere impare, care are proprietatea dorită, poate fi format din cel mult cinci numere. Punctul c) este rezolvat.

Dacă şirul este format numai din numere pare, atunci, fără a se schimba condiţiile, putem să le împărţim pe toate prin 2. Putem deci considera că în şir sînt numai numere impare. Datorită punctului c), nu pot fi mai multe decît cinci.

Observaţiile 1—3 rămîn adevărate acum cu cîteva presupuneri în plus.

La observaţia 1, trebuie să se ceară ca a să nu fie egal cu $b + c$; 2 este adevărată dacă a nu este egal cu suma oricăror doi termeni ai şirului, iar 3 este adevărată dacă d este un număr impar.

Dacă termenii şirului a, b, c sînt pari, iar d este impar, atunci numerele $a + d$, $b + d$ şi $c + d$ nu se divid nici prin a, nici prin b, nici prin c. Prin urmare, numerele $a + b$, $a + c$ se divid prin d, ceea ce contrazice observaţia 3.

Astfel în şirul nostru, nu sînt mai mult de două numere pare. Fie ele două a şi b $(a > b)$. Atunci numărul $a + b$ se divide la toate numerele impare ale şirului şi prin urmare numărul a este cel mai mare din şir.

Dacă numărul a nu este egal cu nici o sumă a oricăror două numere din şir, atunci, eliminînd pe b, obţinem un şir pentru care se verifică observaţiile 1, 2, 3 fără nici o condiţie. Rezolvarea punctului c arată că în acest şir nu sînt mai mulţi de cinci termeni, deci şi în şirul iniţial nu sînt mai mulţi decît şase termeni.

Presupunem acum, că numărul a este egal cu suma anumitor două numere impare ale şirului. Dacă c este cel mai mare dintre aceste numere impare, atunci $a < 2c$.

Mai sus, s-a spus deja că numărul $a + b$ se divide la toate numerele impare ale şirului.

Prin urmare, $a + b \geqslant 2n$, unde prin n s-a notat c.m.m.m.c. al tuturor termenilor impari ai şirului. Numărul c este divizor al numărului n şi fiindcă

$c \neq n$, atunci $3c \leqslant n$ (c şi n sînt numere impare). Pe de altă parte, fiindcă $2c > a$, atunci

$$3c > \frac{3}{2}\, a > \frac{3}{4}\,(a + b) \geqslant \frac{3}{2}\, n > n.$$

S-a obţinut o contradicţie.

Astfel în fiecare caz, în şirul nostru nu sînt mai mult de şase numere. Iată un exemplu de şir cu şase numere: 2, 3, 5, 7, 107, 10693.

Iu. I. Ionin

M 126. *Un poligon circumscris unui cerc de rază r, este tăiat într-un mod oarecare în triunghiuri. Să se demonstreze că suma razelor cercurilor înscrise în aceste triunghiuri este mai mare decît r.*

I.D. Novikov

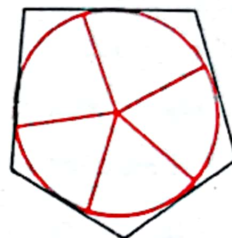


Fig. 197

Fie S aria poligonului p semiperimetrul său, S_i, p_i, r_i respectiv ariile, semiperimetrele şi razele cercurilor înscrise în triunghiurile în care s-a descompus poligonul ($i = 1, 2, \ldots, n$). Atunci $S = p \cdot r$, $S_i = p_i r_i$ şi $p > p_i$ pentru toţi i (nu e greu de demonstrat că perimetrul poligonului este mai mare decît perimetrul oricărui poligon convex înscris în el). De aceea:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n = \frac{S_1}{p_1} + \frac{S_2}{p_2} + \ldots + \frac{S_n}{p_n} > \frac{S_1}{p} + \frac{S_2}{p} + \ldots + \frac{S_n}{p} = \frac{S}{p} = r$$

Ultima egalitate este ilustrată în figura 197.

M 127. *Pentru fiecare număr natural n, vom nota prin $s(n)$ suma cifrelor sale (în scriere zecimală). Vom numi numărul natural m, număr deosebit, dacă nu poate fi pus sub forma $m = n + s(n)$, unde n este un număr natural oarecare. (De exemplu, numărul 117 nu este deosebit, deoarece $117 = 108 + s(108) = 108 + 9$, dar numărul 121 este deosebit, aşa cum se poate verifica uşor.) Este adevărată afirmaţia că există doar un număr finit de numere deosebite?*

Răspuns: această afirmaţie nu este adevărată; există o infinitate de numere deosebite.

Ideea rezolvării celei mai naturale constă în următoarele: Să considerăm toate numerele naturale n de la 1 la un anumit număr N. Printre ele se vor găsi R_N numere n pentru care $n + s(n) > N$. De aceea, printre numerele de la 1 la N vor fi cel mult $N - R_N$ numere care pot fi scrise sub forma $n + s(n)$, adică, cel puţin R_N numere deosebite. Rămîne să stabilim că alegînd în mod corespunzător pe N se poate obţine R_N oricît de mare.

Pentru a dezvolta această idee pînă la o demonstraţie completă, vom arăta că între numerele n de la 1 la $N = 10^{10^k + k}$ există mai mult de 10^k numere pentru care $n + s(n) > N$. Într-adevăr, dacă $n < N$ şi $n \geqslant N_1 = (10^{10^k} - 1)10^k = 9\ldots90\ldots0$ (10^k de nouă şi k zerouri), atunci

$$n + s(n) \geqslant (10^{10^k + k} - 10^k) + 9 \cdot 10^k > N$$

iar numărul numerelor n astfel încît $N_1 \leqslant n \leqslant N$ este egal cu $N - N_1 + 1 = 10^k + 1$.

O altă rezolvare se bazează pe indicarea modului de a construi concret un şir de numere deosebite. Iată un astfel de şir:

$$M_1 = 9 + 11 = 20, \quad m_2 = 20 + 101 = 121, \quad m_3 = 121 + 1001,$$

unde $m_k = m_{k-1} + 10^k + 1$.

Vom demonstra prin inducţie că toate aceste numere sînt deosebite. Să presupunem că pentru m_{k-1} ($k \geqslant 3$) acest lucru e adevărat şi pentru m_k nu, $m_k = n + s(n)$. Înainte de a utiliza această presupunere, să demonstrăm că scrierea zecimală a lui m_k este astfel:

$$m_k = 10^k + a_{k-1}\, 10^{k-1} + \ldots + a_0$$

unde cifra $a_{k-1} \neq 0$ şi $11 \cdot 10^{k-1} < m_k < 2 \cdot 10^k$. Inegalitatea din stînga este evidentă, iar inegalitatea din dreapta o vom demonstra prin inducţie:

$$m_k = m_{k-1} + 10^k + 1 < 2 \cdot 10^{k-1} + 10^k + 1 = 12 \cdot 10^{k-1} + 1 < 2 \cdot 10^k.$$

Acum se poate demonstra că scrierea zecimală a numărului n începe tot cu cifra $1 : n = 10^k + b_{k-1}\, 10^{k-1} + \ldots + b_1 \cdot 10 + b_0$, adică $10^k < n < 2 \cdot 10^k$. Aici inegalitatea din dreapta este evidentă, iar cea din stînga se demonstrează prin reducere la absurd; dacă $n < 10^k$ atunci $s(n) < 9k$ şi $n + s(n) < 10^k + 9k < 10^k + 10^{k-1} = 11 \cdot 10^{k-1} < m_k$ ($9k < 10^{k-1}$ pentru $k \geqslant 3$).

Vom nota numărul $n - 10^k$ (numărul n din care s-a dat afară prima cifră egală cu 1) prin n^*. Atunci este evident că $s(n^*) = s(n) - 1$ şi de aceea $n^* + s(n^*) = n - 10^k + s(n) - 1 = m_k - 10^k - 1 = m_{k-1}$.

Astfel se obţine că numărul m_{k-1} nu este deosebit. Contradicţia, obţinută cu ipoteza de inducţie, justifică corectitudinea trecerii de la $k - 1$ la k. Faptul că m_1 şi m_2 sînt numere deosebite, se verifică uşor.

M 128. *Să se găsească în ce rapoarte sînt laturile unui triunghi care are una dintre mediane împărţită în trei părţi egale de cercul înscris.*

Fie BK mediana triunghiului ABC, care este împărţită de cercul înscris în segmentele congruente $BM = MN = NK = x$, şi T punctul de tangenţă a cercului înscris cu latura BC (fig. 198).

Ne sînt utile următoarele două relaţii adevărate pentru orice triunghi:

$$a + c - b = 2BT$$

$$2a^2 + 2c^2 - b^2 = 4BK^2$$

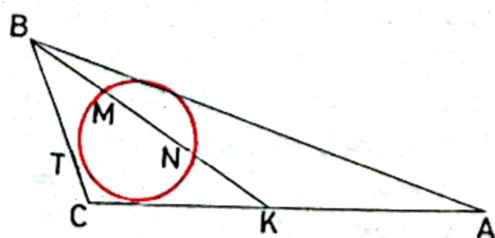


Fig. 198

(prima se deduce din egalitatea $BT + CT = a$, $BT - CT = c - b$; a doua se demonstrează uşor completînd triunghiul pînă la paralelogramul $ABCD$). Din prima egalitate obţinem:

$$2a^2 + 2c^2 - b^2 = 36x^2 \qquad (1)$$

Întrucît $BT^2 = BM \cdot BN$, rezultă

$$(a + c - b)^2 = 8x^2. \qquad (2)$$

În sfîrşit, întrucît punctele B şi K sînt în mod evident, egal depărtate de centrul cercului înscris, rezultă $BC = KC$, de unde

$$b = 2a. \qquad (3)$$

Înlocuind (3) în (1) şi (2), vom găsi

$$c^2 - a^2 = 18x^2, \ (c - a)^2 = 8x^2$$

Din aceste egalităţi vom obţine (evident că $c - a \neq 0$, $x \neq 0$).

$$\frac{c + a}{c - a} = \frac{9}{4}, \text{ de unde } \frac{c}{a} = \frac{13}{5}.$$

Răspuns: $a : b : c = 5 : 10 : 13$.

Se verifică uşor că într-un triunghi în care laturile stau în aceste rapoarte, mediana relativă la latura b este împărţită într-adevăr de cercul înscris în trei părţi egale (pentru verificare este util să se folosească aceleaşi formule care s-au utilizat mai sus).

M 129. *a) Într-o găleată s-au turnat 12 litri de lapte. Cum se poate împărţi această cantitate de lapte în două părţi egale folosind două vase de 5 şi 7 litri?*

b) Să se rezolve problema generală: pentru ce valori a şi b se poate împărţi în două părţi egale cantitatea de a + b litri de lapte, folosind numai vasele de a litri, b litri şi a + b litri? (la o turnare dintr-un vas într-altul se poate turna tot laptele din acesta sau se poate completa al doilea vas pînă la umplere).

V.V. Uşakov

Pentru rezolvarea punctului a) este suficient să urmărim tabela 1.

Tabela 1

Găleată

Vasul I	7	2	2	0	7	4	4	0	7	
Vasul II	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5

Găleată

Pentru ca să rezolvăm punctul b) vom proceda în felul următor. Fie $a \geqslant b$. Vom numi vasul de capacitate $a + b$ rezervor, cel de capacitate a, primul vas, iar cel de capacitate b, al doilea vas. Vom demonstra că putem obţine c litri atunci şi numai atunci cînd $c = ma + pb$, unde m şi p sînt numere întregi $0 \leqslant c \leqslant a$. Dacă a şi b sînt numere întregi, atunci aceasta se poate reformula astfel: se pot obţine c litri atunci şi numai atunci cînd $0 \leqslant c \leqslant a$ şi c se divide prin c.m.M.d.c. al numerelor a şi b. Vom rezolva această problemă presupunînd că a şi b sînt numere întregi; dacă se ştie acest lucru rezolvarea se poate simplifica; de exemplu, nu e nevoie să se considere separat cazurile $m > 0$ şi $m < 0$.

Vom nota prin d_k restul împărţirii lui ka la $b (k = 1, 2, 3, \ldots)$: $d_k = ka - p_k b$, $0 \leqslant d_k < b$.

Este suficient să demonstrăm că se pot obţine $d_m = ma - p_m b$ litri. Într-adevăr $d_m = ma - p_m b$ este cel mai mic număr nenegativ de forma $ma + pb$, unde p este întreg, atunci adăugînd la d_m încă $p + p_m$ porţii de cîte b

litri vom putea obţine cantitatea necesară de $c = ma + pb$ litri. Din tabelele 2 şi 3 (pentru $m > 0$, respectiv pentru $m < 0$) se vede cum se obţin d_m litri.

Tabela 2

Rezervor

I	a	$a-b$	$a-b$	$a-2b$	$a-2b$
II	0	b	0	b	0

Rezervor

$d_1 = a - p_1 b$	0	a	$2a-(p_1+1)b$	$2a-(p_1+1)b$		$d_2 = 2a - p_2 b$		$d_m = ma - p_m b$
0	d_1	d_1	b	0		0		0

Tabela 3

Rezervor

I	0	b	b	$(-p_{-1}-1)b$	a		a
II	b	0	b	b	$d_{-1} = -a - p_{-1}b$		$d_{-m} = -ma - p_{-m}b$

Rezervor

Vom demonstra acum că v litri se pot obţine numai atunci cînd $v = ma + pb$. Într-adevăr primul vas va avea după cîteva turnări în el $v_1 = m_1a + p_1b$ litri, iar în al doilea $v_2 = m_2a + p_2b$ litri (de fapt unul dintre vase este sau gol sau plin, dar acest lucru nu-l vom folosi). Atunci, oricum ne vom organiza următoarea turnare, numărul litrilor în fiecare vas va fi egal cu $m'a + p'b$. În cazul în care se foloseşte rezervorul acest lucru este evident, celelalte cazuri sînt cuprinse în tabela 4.

Tabela 4

	$v_1+v_2 > a$		$a \geqslant v_1+v_2 > b$		$b \geqslant v_1+v_2$	
Vasul I	a	v_1+v_2-b	a	v_1+v_2-b	v_1+v_2	0
Vasul II	v_1+v_2-a	b	0	b	0	v_1+v_2

Acum se poate rezolva problema. Din cele demonstrate rezultă că cu ajutorul turnărilor se pot obţine $\frac{a+b}{2}$ litri atunci şi numai atunci cînd $\frac{a+b}{2} = ma + pb$, de unde $(2m-1)a + (2p-1)b = 0$ sau $\frac{a}{b} = \frac{2p-1}{1-2m}$. Adică, se poate separa un număr c astfel încît a/c şi b/c să fie numere întregi impare.

Se vede că tabelele care arată ordinea de turnare se pot interpreta geometric uşor (fig. 199, 200).

L.G. Limanov

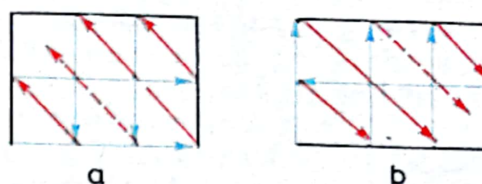


Fig. 199. Situaţia în care în primul vas sînt x litri şi în al doilea vas y litri corespunde punctului de coordonate (x,y), iar turnările succesive sînt reprezentate prin săgeţi roşii însemnează turnare dintr-un vas în celălalt, iar cele albastre turnare cu folosirea rezervorului. Figura a corespunde tabelelor 1 şi 2, figura b, tabelei 3.

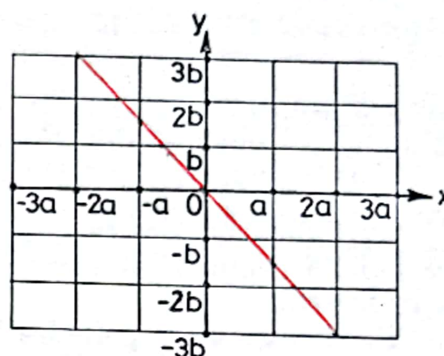


Fig. 200. Se observă că dacă se taie planul în dreptunghiuri $a \times b$ (după liniile negre) şi grupăm la un loc toate dreptunghiurile care conţin segmente din linia roşie, atunci drumul dreapta-jos (sau stînga-sus) corespunde la desenul b (respectiv a) (segmentele albastre apar în locurile tăieturilor).

M 130. *Care este cel mai mare număr de puncte*
a) din plan;
b) din spaţiu.
astfel încît nici unul dintre triunghiurile cu vîrfurile în aceste puncte, să nu fie obtuzunghic?

G.A. Galperin

R ă s p u n s: a) 4 puncte; b) 8 puncte. Exemple de astfel de situaţii: a) în vîrfurile unui pătrat; b) în vîrfurile unui cub;
(Desigur că în ipoteza problemei se subînţelege că orice trei puncte nu sînt coliniare — fără această condiţie pot să fie oricîte puncte).

Vom demonstra că mai multe puncte nu pot să fie.

Să observăm înainte de toate (acest lucru se referă atît la problema din plan cît şi la cea din spaţiu) că dacă A_i şi A_j sînt oricare două dintre cele n puncte $A_1, A_2, .., A_n$, care satisfac condiţia problemei, atunci toate aceste puncte trebuie să aparţină mulţimii acelor puncte M pentru care avem deodată $\sphericalangle MA_i A_j \leqslant 90°$ şi $\sphericalangle MA_jA_i \leqslant 90°$. Această mulţime este o bandă cuprinsă între dreptele (în spaţiu, planele) duse prin punctele A_i şi A_j perpendiculare pe segmentul A_iA_j (fig. 201); vom nota mai jos această bandă prin π_{ij}.

Din această observaţie rezultă că dacă vom considera înfăşurătoarea convexă V a celor n puncte — care e cel mai mic poligon (poliedru) convex care cuprinde toate aceste puncte — atunci toate punctele $A_1, A_2, ..., A_n$, trebuie să fie situate pe frontiera mulţimii V; nici unul dintre ele nu poate fi în interiorul lui V căci V este cuprinsă în fiecare dintre benzile π_{ij}.

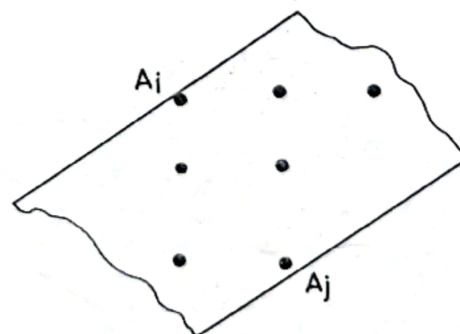


Fig. 201

Rezolvarea problemei a) se obţine acum în două cuvinte. În acest caz V este un poligon convex cu n laturi, cu vîrfurile $A_1, A_2, ..., A_n$. Suma unghiurilor sale este egală cu $180° (n-2)$ şi dacă fiecare dintre aceste unghiuri nu e mai mare de $90°$,

rezultă

$$180°(n-2) \leqslant 90°n$$

de unde $n \leqslant 4$.

Problema în spaţiu este mult mai dificilă. Dăm rezolvarea pe care au dat-o prima dată în 1962 cunoscuţii geometrii L. Dantzer şi B.Grünbaum.

Să considerăm, în afară de poliedrul V (aici prin V vom înţelege înfăşurătoarea convexă a celor n puncte date, sau intersecţia — partea comună — a tuturor celor $\frac{n(n-1)}{2}$ benzi π_{ij}) şi următoarele poliedre: V_i obţinut din V printr-o translaţie de vector $\overrightarrow{A_1A_i}$ ($i = 1, 2, ..., n$; desigur că V_1 coincide cu V) şi V' obţinut din V printr-o omotetie de coeficient 2 şi centru A_1.

Vom demonstra următoarele trei afirmaţii.

1°. Poliedrul care se obţine din V printr-o translaţie de vector $\overrightarrow{A_iA_j}$ nu are puncte comune interioare cu V (adică se poate intersecta cu V numai pe frontieră).

2°. Oricare două poliedre $V_1, V_2, ..., V_n$ nu au puncte interioare comune.

3°. Toate poliedrele V_i sînt cuprinse în V'.

Să demonstrăm 1°. Prin translaţia cu $\overrightarrow{A_iA_j}$ banda π_{ij} trece într-o nouă bandă care nu are cu ea puncte comune interioare — aceste două benzi au în comun numai un plan frontieră. Dar V este conţinut în π_{ij}, de aceea cu atît mai mult este adevărat 1°.

2° rezultă direct din 1°: este suficient să observăm că V_j se obţine din V_i printr-o translaţie de vector $\overrightarrow{A_iA_j}$ (fig. 202),

3° rezultă dintr-un fapt mai general: dacă A, B, C sînt trei puncte ale unui poliedru convex W şi W' este poliedrul obţinut din W printr-o omotetie de coeficient 2 şi de centru A, atunci al patrulea vîrf D al paralelogramului $ABCD$ (adică punctul obţinut din C prin translaţia de vector $\overrightarrow{AB}$) aparţine lui W'. Acest fapt se demonstrează uşor: punctul K, din care prin omotetie se obţine D, este mijlocul segmentului AD şi este totodată mijlocul segmentului BC, de aceea el aparţine lui W (căci poliedrul W este convex) de aceea D aparţine lui W' (fig. 203).

Astfel, afirmaţiile 2° şi 3° sînt demonstrate. Fie v volumul poliedrului V. Atunci volumul fiecărui V_i este egal tot cu v, iar volumul lui V' este $8v$. Din 2 şi 3 rezultă că $nv \leqslant 8$, de unde $n \leqslant 8$.

Facem observaţia că pe parcurs am rezolvat o problemă dată la a XIII-a Olimpiadă internaţională de matematică. Problema **M 130** a fost considerată de juriu prea dificilă (iată textul problemei de la *Olimpiadă:*

Se dă un poliedru convex P_1 cu nouă vîrfuri $A_1, A_2, ..., A_9$. Notăm prin P_2,

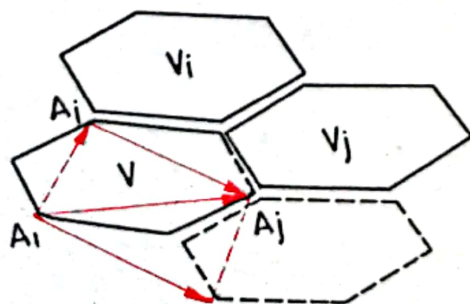


Fig. 202

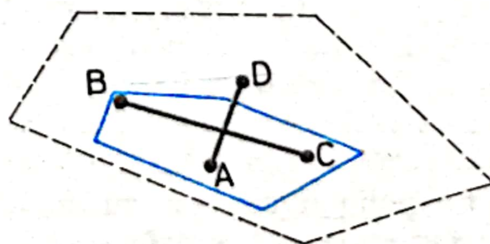


Fig. 203

$P_3, \ldots, P_9$ **poliedrele obținute din** P_1 prin translațiile care mută punctul A_1 respectiv în punctele A_2. $A_3, \ldots, A_9$. Să se demonstreze că cel puțin două dintre poliedrele P_1, $P_2, \ldots, P_9$ au cel puțin un punct interior comun.)

În legătură cu afirmația demonstrată apare o serie întreagă de chestiuni care nu se pot rezolva prin procedeul frumos, dar destul de artificial pe care l-am descris. De exemplu, care este cel mai mare număr de puncte din spațiu astfel ca toate triunghiurile cu vîrfurile în aceste puncte să fie ascuțitunghice? Din rezolvarea noastră se vede că nu pot fi 8 puncte (convingeți-vă de acest lucru!). Nu e greu de construit un exemplu cînd sînt 5 puncte Pot să fie 6. Dar 7?. O problemă mai generală și probabil mai dificilă este următoarea: care este numărul cel mai mare de puncte astfel încît toate unghiurile formate să nu depășească o mărime α dată?

M 131. *Să se demonstreze că cele patru puncte, în care bisectoarele unghiurilor dintre prelungirile laturilor unui patrulater înscris intersectează laturile sale, sînt vîrfurile unui romb (fig. 204).*

M. Urtembaev (elev cl. a X-a)

Vom rezolva această problemă folosind cunoscutele teoreme privind măsura unghiurilor formate de două secante la cerc. Notațiile sînt evidente din figura 204. Întrucît PN și QN sînt bisectoare, rezultă

$$\alpha_6 - \alpha_1 = \alpha_5 - \alpha_2$$
$$\alpha_7 - \alpha_4 = \alpha_8 - \alpha_3$$

Adunînd aceste egalități, obținem $\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_8$, prin urmare, suma arcelor în fiecare dintre membrii ultimei egalități, este egală cu o jumătate de cerc. De aceea dreptele PN și QK sînt perpendiculare între ele. De aici rezultă că în triunghiul KPM bisectoarea unghiului P este totodată și înălțime; atunci ea este totodată și mediană. Triunghiul KPM este isoscel. Același lucru se poate spune despre triunghiul LQN. Astfel în patrulaterul $KLMN$ diagonalele sînt perpendiculare între el și se înjumătățesc, de aceea el este romb.

N.B. Vasiliev

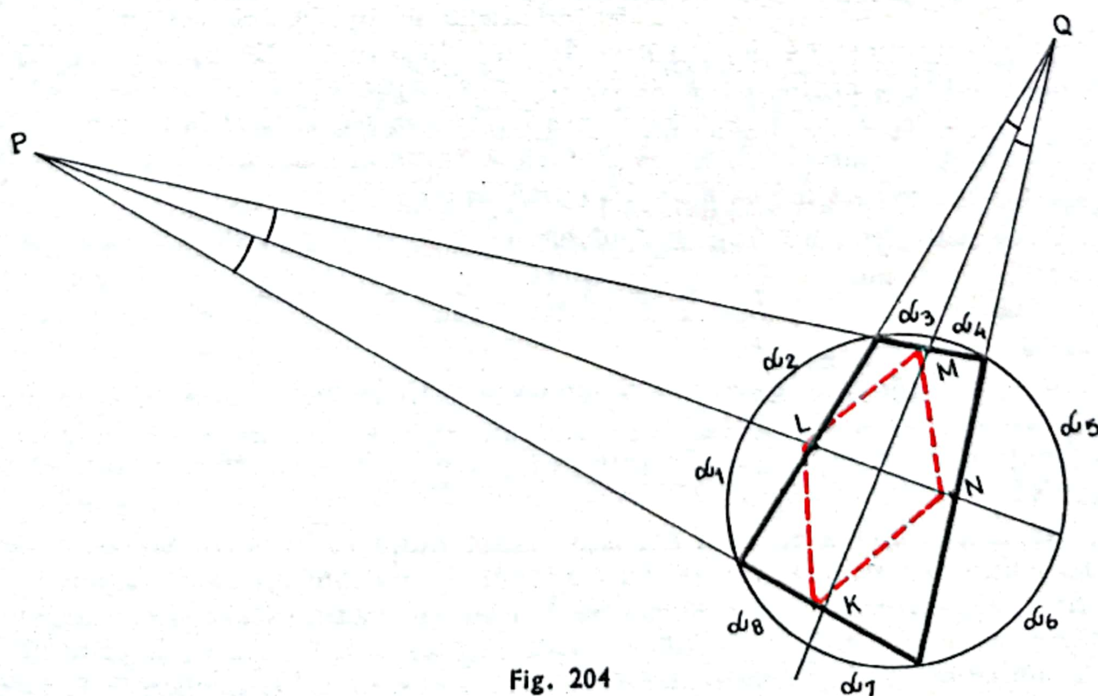


Fig. 204

M 132. *Pe o circumferință s-au scris n numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiecare dintre ele fiind egal cu $+1$ sau cu -1 și suma celor n produse formate din cîte două numere vecine este nulă (ca și la problema M 93) și în general, pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots, n-1$ suma celor n produse formate din factori distanțați între ei cu k locuri este nulă (adică $x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots = 0$ ș.a.m.d.): un exemplu pentru $n = 4$ este dat pe figura 205.*

a) Să se demonstreze că n este pătratul unui număr întreg.

b) Există o astfel de mulțime de n numere, pentru $n = 16$? (Rezolvarea completă a problemei: pentru ce n, o astfel de mulțime de numere există — nu o cunoaștem.)

Vom demonstra că n este pătratul unui număr întreg. Fie $m = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Atunci m este număr întreg.

$$m^2 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + (x_1x_2 + \ldots + x_nx_1) + (x_1x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{n-1}x_1 + x_nx_2) + \ldots + (x_1x_n + x_2x_1 + x_3x_2 \ldots + x_nx_{n-1}).$$

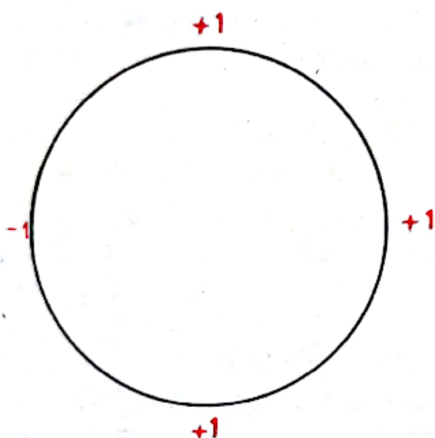


Fig. 205

Cum rezultă din condițiile problemei, în partea dreaptă a acestei egalități, suma numerelor din prima paranteză este egală cu n, iar suma numerelor în oricare altă paranteză este egală cu 0. Rezultă $n = m^2$. Punctul a) este rezolvat.

Să vedem pentru ce n se pot alege numerele $x_1, \ldots, x_n$ care să satisfacă condițiile problemei. Cum rezultă din problema M 93, n trebuie să se dividă prin 4, rezultă că n este pătratul unui număr cu soț. Dacă $n = 4$ se pot alege astfel de numere: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = -1$. Următoarea valoare posibilă pentru n este 16.

Vom demonstra că pentru $n = 16$, nu se pot alege numerele respective.

Să presupunem că pentru $n = 16$ sînt date numerele $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$ care satisfac condițiile problemei și să încercăm să ajungem la o contradicție.

Fie $m = x_1 + \ldots + x_{16}$. Se poate considera că $m \geqslant 0$ (altfel am putea, schimba toate numerele x_i în $-x_i$ fără a se modifica condițiile problemei), cum s-a demonstrat $m^2 = n = 16$ adică $m = 4$.

Dacă p dintre numerele x_i sînt egale cu $+1$ și q egale cu -1, atunci

$$p + q = n = 16 \text{ și } \quad p - q = m = 4.$$

Rezultă, $p = 10$, $q = 6$.

Vom considera că numerele x_i sînt scrise în vîrfurile unui poligon regulat cu 16 vîrfuri. Vom marca cu cîte o steluță acele vîrfuri în care este scris -1 (în total șase vîrfuri). Să rotim întregul desen cu $k/16$ părți dintr-o tură completă ($k = 1, 2, \ldots, 15$).

Vom demonstra că prin aceasta, exact două steluțe vor trece în vîrfuri în care anterior au fost steluțe. Într-adevăr, fie ca cele r numere egale cu -1 să treacă în locuri în care erau tot -1. Atunci în suma $x_1x_{k+1} + x_2x_{k+2} + \ldots + x_{16}x_{k+1}x_1$ vor fi $6 - r$ termeni în care primul factor va fi egal cu -1 și al doilea cu $+1$ și $6 - r$ termeni în care al doilea factor este egal cu -1



şi primul cu $+1$; înseamnă că $2(6-r)$ factori sînt egali cu -1. Fiindcă suma este egală cu 0, rezultă că $2(6-r)=8$ adică $r=2$.

Acum se poate reformula problema dată în felul următor: se pot pune în vîrfurile unui poligon regulat cu 16 laturi 6 steluţe, astfel încît două dintre ele să fie situate în vîrfuri opuse şi pentru orice număr k de la 1 la 7 să existe exact două perechi de steluţe astfel încît distanţa dintre steluţele dintr-o pereche să fie egală cu k (prin distanţa dintre două steluţe se înţelege lungimea celui mai scurt dintre arcele care le unesc, iar lungimea întregii circumferinţe se ia de 16 părţi; distanţa dintre punctele X şi Y o vom nota (XY)).

Vom nota prin A şi B punctele diametral opuse marcate prin steluţe şi prin C, D, E, F celelalte puncte marcate. Vom calcula suma tuturor distanţelor dintre punctele A, B, C, D, E, F. Distanţa de 8 se întîlneşte o singură dată, iar distanţele de la 1 la 7 de cîte două ori, deci ca rezultat suma totală este $2(1+2+3+4+5+6+7)+8=64$.

Să vedem ce distanţe se realizează între punctele C, D, E, F. Fiindcă $(AX)+(BX)=8$ pentru orice punct X, atunci suma Σ a tuturor distanţelor dintre punctele C, D, E, F va fi egală cu $64-(AB)-4\cdot 8=24$. În plus, dacă o anumită distanţă k se realizează între punctele C, D, E, F, atunci aceasta înseamnă că printre numerele (AC), (AD), (AE), (AF) şi (BC), (BD), (BE), (BF) numărul k se întîlneşte de mai puţin de două ori; dar atunci şi $(8-k)$ se întîlneşte de mai puţin de două ori, adică $8-k$ se realizează, de asemenea, ca distanţă dintre punctele C, D, E, F, Să vedem cum pot fi aranjate punctele C, D, E, F. Se verifică uşor că sînt posibile două cazuri:

1) Trei puncte oarecare (de exemplu, C, D, E) formează un triunghi care conţine centrul cercului. Presupunem că F este cuprins între C şi D. Atunci

$$(CD)+(DE)+(CE)=16, \qquad (CF)+(DF)=(CD)$$

şi în plus, (EF) este mai mare decît (CE) sau (DE). Fiindcă şi $(CD)+(DE)>8$, şi $(CD)+(CE)>8$, rezultă
$\Sigma=(CD)+(DE)+(CE)+(CF)+(DF)+(EF)=16+(CD)+(EF)>$
>24; dar, cum am demonstrat mai sus această sumă trebuie să fie egală cu 24 deci primul caz nu e posibil.

2) Punctele C, D, E, F sînt situate de aceeaşi parte a unui diametru. Presupunem că sînt situate pe circumferinţă în următoarea ordine C, D, E, F. Atunci $(CD)+(DF)=(CF)$ şi $(CE)+(EF)=(CF)$ de aceea suma Σ este egală cu $3(CF)+(DE)$. Rezultă $3(CF)+(DE)=24$. Fiindcă $CF>DE$, atunci $(CF)=7$, $(DE)=3$. Dacă $(CD)=1$ atunci $(DF)=6$; dar prin aceasta distanţa $2=8-6$ nu se realizează între punctele C, D, E, F, ceea ce contrazice ce s-a demonstrat mai înainte. Dacă $(CD)=2$, atunci deşi $(CF)=7$, distanţa 1 nu se realizează. Dacă $(CD)=3$, atunci $(EF)=1$ şi acest caz nu se deosebeşte de cazul $(CD)=1$.

Astfel, am obţinut rezultatul că nu se pot aşeza steluţele în modul cerut (deci nu se pot alege nici numerele x_i). Punctul b) este rezolvat.

Răspunsul la problema generală nu îl cunoaştem, dar după aparenţe, nu se pot găsi numere care să satisfacă condiţiile problemei decît pentru $n=4$.

D.N. Bernştein

M 133. *Unul dintre cele mai simple organisme pluricelulare — alga „volvox" este ca un înveliş sferic compus în principal din celule heptagonale, hexagonale şi pentagonale (adică celule care au şapte, şase sau cinci celule vecine); în fiecare*

„vîrf" se întîlnesc trei celule (fig. 206). Unele exemplare au şi celule tetragonale sau octogonale, dar biologii au observat că dacă nu sînt astfel de celule „nestandard" (cu mai puţin de cinci şi cu mai mult de şapte laturi), atunci totdeauna celulele pentagonale sînt exact cu 12 mai multe decît cele heptagonale (în total pot să fie sute şi chiar mii de celule). Puteţi lămuri acest fapt?

V. Maresin

Afirmaţia problemei rezultă din formula lui Euler. Într-adevăr, notînd numărul vîrfurilor volvoxului prin V, numărul muchiilor prin M, şi numărul feţelor cu i vîrfuri prin F_i, după formula lui Euler avem

$$2 = V - M + \Sigma F_i$$

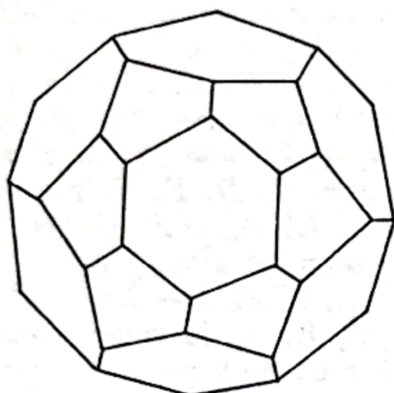


Fig. 206

Dar $3V = \Sigma_i F_i$ întrucît după condiţie în fiecare vîrf ajung trei feţe, iar $2M = \Sigma_i F_i$ la fiecare muchie ajung două feţe. Prin urmare, $12 = 6V - 6M + 6\Sigma F_i = \Sigma_{2i} F_i - \Sigma_{3i} F_i + \Sigma_6 F_i = \Sigma(6 - i)F_i$. După ipoteză nu sînt feţe nestandard, adică $F_3 = F_4 = F_8 = F_9 = \ldots = 0$. De aceea $F_5 - F_7 = 12$ în deplină concordanţă cu ce au observat biologii.

M 134. *Care e mulţimea punctelor ce pot fi centre de greutate ale triunghiurilor care au cele trei vîrfuri pe cele trei laturi AB, BC şi AC ale unui triunghi dat ABC?*

L.G. Makarov

Este bine să considerăm nu numai triunghiurile propriu-zise ci şi triunghiurile degenerate. Vom demonstra la început că orice punct al hexagonului din fig. 207 este un centru de greutate al unui triunghi înscris. Pentru aceasta ne este utilă următoarea lemă.

Lemă. Dacă punctul O_1 este centrul de greutate al triunghiului înscris $K_1L_1M_1$ şi punctul O_2 este centrul de greutate al triunghiului înscris $K_2L_2M_2$, atunci orice punct al segmentului O_1O_2 este centrul de greutate al unui anumit triunghi înscris.

Demonstraţie. Este bine să folosim interpretarea mecanică a noţiunii de centru de greutate. Presupunem că punctul O_3 aparţine segmentului O_1O_2. Atunci se pot pune astfel de greutăţi p_1 şi p_2 în punctele O_1 şi O_2 încît O_3 este centrul lor de greutate. Vom situa acum în vîrfurile triunghiurilor $K_1L_1M_1$ greutăţile $p_1/3$ şi greutăţile $p_2/3$ în vîrfurile triunghiului $K_2L_2M_2$ (fig. 208). Centrul de greutate al acestor şase greutăţi coincide cu punctul O_3. Pe de altă parte, el este centrul de greutate al celor trei greutăţi $\frac{p_1 + p_2}{2}$ aşezate în vîrfurile triunghiului $K_3L_3M_3$ obţinut în felul următor. Punctele K_3, L_3 şi M_3 sînt centrele de greutate ale perechilor de greutăţi $p_1/3$, $p_2/3$ aşezate în punctele K_1, K_2; L_1, L_2 şi M_1, M_2 respectiv. Astfel, plecînd de la triunghiurile $K_1L_1M_1$ şi $K_2L_2M_2$ şi de la un punct O_3 arbitrar al segmentului O_1O_2 am putut construi triunghiul $K_3L_3M_3$ al cărui centru de greutate este O_3. Lema este demonstrată.

Acum e uşor de demonstrat că orice punct al hexagonului este centrul de greutate al unui anumit triunghi înscris. Într-adevăr este suficient să se demonstreze acest lucru pentru vîrfurile lui şi apoi să se utilizeze lema. Cu

ajutorul ei de la vîrfuri ajungem la punctele de pe frontieră şi apoi la orice punct interior. Dar pentru vîrfuri, aceste triunghiuri se construiesc uşor: acestea sînt triunghiurile degenerate în care vîrfurile sînt situate în vîrfurile triunghiului dat şi două vîrfuri coincid.

Rămîne să se demonstreze că punctele situate în interiorul triunghiurilor AB_1C_1, A_1BC_2, A_2B_2C nu pot să fie centre de greutate ale unor triunghiuri inscrise. Într-adevăr, presupunem că pentru un anumit punct O al triunghiului AB_1C_1 s-a găsit un triunghi KLM pentru care el este centru de greutate (fig. 209). Dar atunci el împarte segmentul KN în raportul 1 : 2 ceea ce este imposibil.

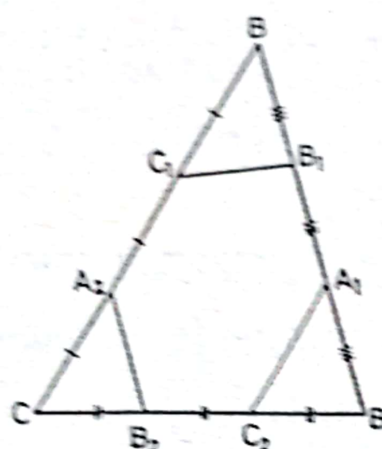


Fig. 207

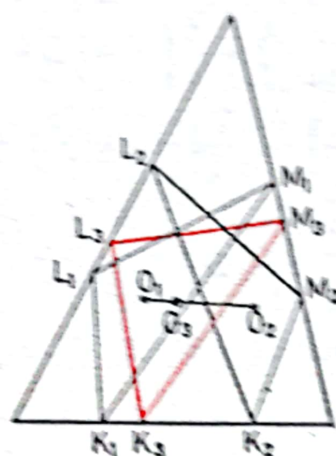


Fig. 208

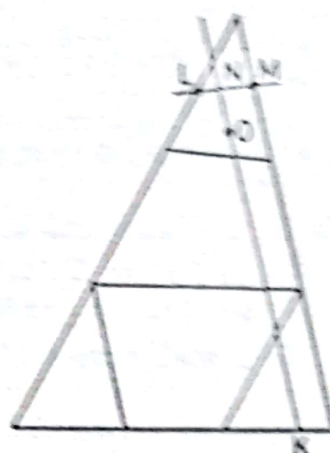


Fig. 209

M 135. *Să se demonstreze că pentru fiecare număr natural $n \geq 1$, este adevărată identitatea:*

$$\sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) \dots \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) = c_n \sin nx,$$

unde c_n este un anumit număr care depinde de n şi să se găsească c_n

V. Maresin

Vom demonstra la început următoarea lemă.

Lemă. $\sin nx = \sin x \cdot A_n(\cos x)$, **unde** $A_n(x)$ **este un anumit polinom de gradul** $n - 1$, **cu primul coeficient** 2^{n-1}, $\cos nx = B_n(\cos x)$ **unde** $B_n(x)$ **este un anumit polinom de gradul** n **cu primul coeficient** 2^{n-1}.

Este evident că pentru $n = 1$ afirmaţia lemei este adevărată. Să presupunem că este adevărată pentru $n = k$. Atunci

$$\sin (k + 1)x = \sin x \cdot \cos kx + \cos x \cdot \sin kx = \sin x(B_k(\cos x) +$$
$$+ \cos x \cdot A_k(\cos x)); \cos (k + 1)x = \cos x \cdot \cos kx - \sin x \sin kx =$$
$$= \cos x \cdot B_k(\cos x) + (\cos^2 x - 1)A_k(\cos x).$$

De aceea este evident că $A_{k+1}(x) = B_k(x) + xA_k(x)$ şi $B_{k+1}(x) = xB_k(x) + (x^2 - 1)A_k(x)$ sînt polinoame în care primii coeficienţi sînt egali cu suma primilor coeficienţi ai polinoamelor $A_k(n)$ şi $B_k(n)$, adică $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$. Lema este demonstrată.

Să notăm $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \dots \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)$. Vom însuma doi cîte doi termenii de forma $\sin\left(x + \frac{\pi i}{n}\right)$ şi $\sin\left(x + \frac{\pi(n-i)}{n}\right)$, unde $0 < i < \frac{n}{2}$.

Dacă n este par, atunci în produs rămîne încă un termen

$$\sin\left(x + \frac{\pi\frac{n}{2}}{n}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

Vom transforma produsele efectuate astfel:

$$\sin\left(x + \frac{\pi i}{n}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi(n-i)}{2n}\right) = \frac{1}{2}\left[-\cos(2x + \pi) + \cos\left(\frac{2\pi i}{n} - \pi\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\cos 2x - \cos\frac{2\pi i}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(2\cos^2 x - 1 - \cos\frac{2\pi i}{n}\right) = \cos^2 x - d_i$$

unde d_i sînt anumite constante.

Astfel $f(x) = D_n(\cos x)$ unde $D_n(x)$ este un anumit polinom de gradul $n-1$ cu primul coeficient 1.

Ne-a mai rămas să demonstrăm că $A_n(x) = 2^{n-1}D_n(x)$ (în particular va rezulta că constanta c_n din cerinţa problemei este egală cu $\frac{1}{2^{n-1}}$).

Vom folosi pentru acest lucru teorema care afirmă că un polinom de gradul k nu are mai mult de k rădăcini diferite.

Să considerăm polinomul $F(x) = A_n(x) - 2^{n-1}D_n(x)$. Gradul său este mai mic decît $n-1$, fiindcă coeficienţii lui x^{n-1} din polinoamele $A_n(x)$ şi $2^{n-1}D_n(x)$ sînt egali. Înseamnă că sau $F(x)$ este identic nul fie că $F(x)$ are mai puţin decît $n-1$ rădăcini.

Să considerăm punctele $x_1 = -\frac{\pi}{n}$, $x_2 = -\frac{2\pi}{n}$, ..., $x_{n-1} = -\frac{\pi(n-1)}{n}$ şi fie $t_i = \cos x_i$. Este clar că $f(x_i) = 0$ şi de aceea $D_n(t_i) = 0$; în afară de acesta $\sin(nx_i) = 0$, iar $\sin x_i \neq 0$, înseamnă că $A_n(\cos x_i) = A_n(t_i) = 0$. Observăm că toate punctele t_i sînt diferite fiindcă $\cos x$ creşte pe segmentul $[-\pi, 0]$.

Astfel, polinomul $F(x)$ se transformă în zero pentru $n-1$ puncte $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ şi înseamnă că $F(x)$ este identic nul. Astfel $A_n = 2^{n-1}D_n$, adică

$$\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \dots \sin\left(x + \frac{\pi(n-1)}{n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}}\sin nx.$$

I.N. Bernştein

M 136. *Se pot scoate dintr-o carieră de piatră 50 de blocuri de piatră avînd greutăţile de 370 kg, 372 kg, 374 kg ..., 468 kg (greutăţile formează o progresie aritmetică cu raţia 2 kg) cu şapte camioane de trei tone?*

V.P. Fedotov

Răspuns. Nu se poate.
Dacă s-ar putea, atunci într-un anumit camion trebuie să fie puse 8 pietre. Dar chiar cele mai uşoare 8 pietre cîntăresc:

$$370 + 372 + 374 + 376 + 378 + 380 + 382 + 384 = 4 \cdot 754 = 3016 \text{ kg}.$$

M 137. *Fie a, b, c, d lungimile celor patru laturi consecutive ale unui patrulater şi S aria sa.*

a) Să se demonstreze că $2S \leqslant ab + cd$

b) Să se demonstreze că $2S \leqslant ac + bd$.

c) Să se demonstreze că dacă cel puţin într-una dintre aceste inegalităţi se realizează egalitatea, atunci patrulaterul este inscriptibil.

Întrucît pentru orice patrulater neconvex se poate construi un patrulater convex cu laturi de aceeaşi lungime şi cu arie mai mare (fig. 210) e clar că este suficient să se demonstreze inegalităţile cerute pentru un patrulater convex. De aceea vom considera numai patrulatere convexe.

Astfel, fie în patrulaterul convex $ABCD$ (fig. 212) $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, şi aria lui $ABCD$ egală cu S. Aria unui triunghi nu depăşeşte niciodată semiprodusul a două laturi ale sale (fig. 211). De aceea:

$$2S(\Delta ABC) \leqslant ab \quad \text{şi} \quad 2S(\Delta CDA) \leqslant cd. \tag{1}$$

Adunînd aceste inegalităţi, vom obţine:

$$2S \leqslant ab + cd \tag{2}$$

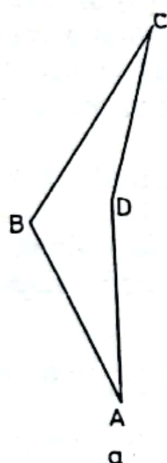


Fig. 210

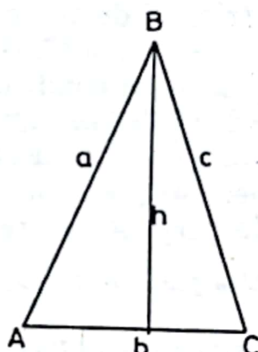


Fig. 211

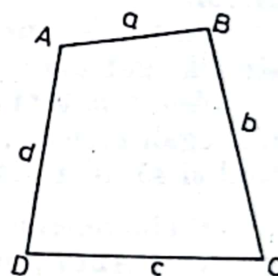


Fig. 212

Aici se obţine egalitatea în cazul în care se realizează deodată în ambele inegalităţi (1), adică atunci şi numai atunci cînd unghiurile B şi D sînt amîndouă drepte. Evident că în aceste cazuri patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil (iar diagonala AC este diametrul cercului). Din cele spuse mai sus rezultă de asemenea că patrulaterul pentru care $2S = ab + cd$, poate fi construit din segmentele a, b, c, d atunci şi numai atunci cînd lungimile lor satisfac condiţia:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2. \tag{3}$$

Punctul b) este ceva mai dificil. El poate fi rezolvat „frontal" aplicînd diferite formule pentru aria triunghiului. Dar există şi o rezolvare simplă geometrică.

Descompunem patrulaterul ca şi mai înainte prin diagonala BD în două triunghiuri şi unul dintre triunghiuri — să zicem BCD — „îl întoarcem în cealaltă parte" şi alăturăm latura BD la triunghiul BAD. Cu alte cuvinte, înlocuim triunghiul BCD cu triunghiul $BC'D$ simetric cu primul faţă de per-

pendiculara dusă pe segmentul BD prin mijlocul său (fig. 213). Evident că aria patrulaterului nu se modifică. Dar acum putem să folosim rezultatul de la punctul a):

$$2S \leqslant AB \cdot BC' + C'D \cdot DA$$

sau

$$2S \leqslant ac + bd. \tag{4}$$

Egalitatea se atinge în (4) dacă în patrulaterul „reconstruit" $ABC'D$ unghiurile B şi D sînt drepte, adică dacă în patrulaterul iniţial $ABCD$, unghiurile pe care diagonala BD le face cu fiecare pereche de laturi opuse, însumate dau 90°:

$$\sphericalangle ABD + \sphericalangle BDC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle DBC = 90°. \tag{5}$$

De aici rezultă că $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180°$, adică patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil (acest lucru rezultă şi din $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle A + \sphericalangle C' = 180°$). (Facem observaţia că patrulaterul pentru care $2S = ac + bd$ (6) poate fi construit din segmentele a, b, c, d, atunci şi numai atunci

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \tag{7}$$

acest lucru rezultă din (3) aplicat la $ABC'D$.)

Încă o observaţie. Nu vi se pare ciudat că condiţia (5) necesară şi suficientă pentru îndeplinirea egalităţii (6) este „nesimetrică". Doar în (6) ambele perechi de vîrfuri opuse participă în mod egal, cu ce e mai bună diagonala BD decît AC? Evident, cu nimic nu e mai bună. Vom vedea imediat că condiţia (5) poate fi făcută simetrică şi de aceea, aşa cum se întîmplă de obicei, mai simplă.

Se verifică uşor (fig. 214) că condiţia (5) este echivalentă cu următoarea, simplă: patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil şi $AC \perp BD$.

Acum putem reformula rezultatul nostru astfel: pentru ca să fie îndeplinită egalitatea (6), este necesar şi suficient ca patrulaterul $ABCD$ să fie inscriptibil şi să aibă diagonale perpendiculare.

O altă rezolvare simplă a punctului b) se bazează pe teorema lui Ptolomeu: În orice patrulater $ABCD$, avem

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC, \tag{8}$$

iar egalitatea se atinge aici numai cînd patrulaterul este inscriptibil.

Din această teoremă rezultă că (φ este unghiul dintre diagonale)

$$S = AC \cdot BD \sin\varphi \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC = ac + bd.$$

Pe această cale, egalitatea se obţine direct în formă „simetrică" (dar condiţia (7) se obţine mai greu)

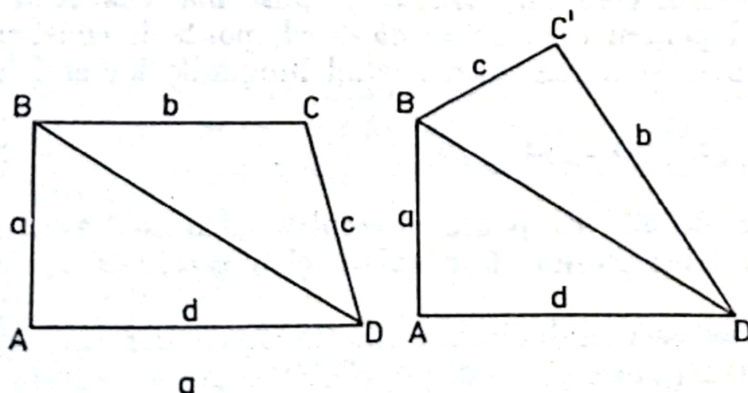


Fig. 213

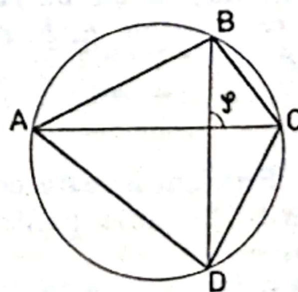


Fig. 214

M 138. *Să se demonstreze că dacă m şi n sînt numere naturale $1 \leqslant m < n$, atunci*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot k^m C_n^k = 0$$

unde C_n^k sînt coeficienţii binomiali adică coeficienţii polinomului

$$(1 + x)^m = \sum_{k=0}^{m} C_n^k x^k.$$

M.I. Sidorov

Dăm una dintre cele mai scurte demonstraţii prin inducţie care aparţine lui B. Frişling. Se vede uşor că egalitatea cerută este adevărată pentru $n = 2, 3, 4$. Iată de exemplu, pentru $n = 4$: $C_4^0 = 1$, $C_4^1 = 4$, $C_4^2 = 6$, $C_4^3 = 4$, $C_4^4 = 1$ şi sînt adevărate egalităţile

$$-1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 0$$

$$-1^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 6 - 3^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 1 = 0$$

$$-1^3 \cdot 4 + 2^3 \cdot 6 - 3^3 \cdot 4 + 4^3 \cdot 1 = 0.$$

Să admitem acum că pentru $s < n - 1$ sînt adevărate egalităţile

$$\sum\nolimits_{j=0}^{j=n-1} (-1)^j j^s C_{n-1}^j = 0$$

(am folosit aici şi mai jos o notaţie mai neobişnuită pentru indicii de la sumă, pentru ca să economisim spaţiu şi să uşurăm munca culegătorului; în multe reviste se procedează astăzi aşa):

Vom folosi egalitate $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$

şi obţinem:

$$\sum\nolimits_{k=1}^{k=n} (-1)^k k^m C_n^k = n \sum\nolimits_{k=1}^{k=n} (-1)^k k^{m-1} C_{n-1}^{k-1} = n \sum\nolimits_{j=0}^{j=n-1} (-1)^{j+1} (j +$$

$$+ 1)^{m-1} C_{n-1}^j = -n \sum\nolimits_{j=0}^{j=n-1} [(-1)^j (\sum\nolimits_{s=0}^{s=m-1} C_{m-1}^s j^s) C_{n-1}^j] =$$

$$= -n \sum\nolimits_{s=0}^{s=m-1} [C_{m-1}^s (\sum\nolimits_{j=0}^{j=n-1} (-1)^j C_{n-1}^j)].$$

Dacă $m < n$, atunci în ultima expresie fiecare paranteză rotundă va fi nulă după presupunerea de inducţie (întrucît $s \leqslant m - 1 < n - 1$) şi de aceea întreaga sumă este egală cu zero. Demonstraţia este terminată.

Se mai pot da soluţii bazate pe formule de combinatorică, pe identităţi între polinoame, pe teoria seriilor ş.a.

N.B. Vasiliev

M 139. *Din vîrful B al paralelogramului $ABCD$ se duc înălţimile sale BK şi BH. Se cunosc segmentele $KH = a$ şi $BD = b$. Să se găsească distanţa de la punctul B pînă la punctul de intersecţie a înălţimilor triunghiului BKH.*

F.A. Bartenev

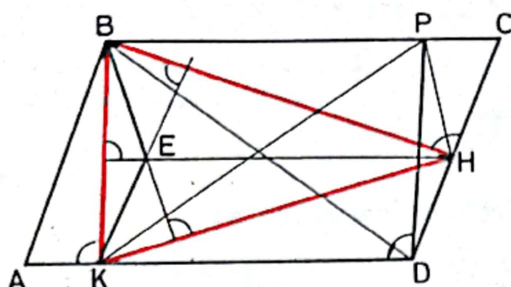


Fig. 215

Pe lingă rezolvările obținute prin calcule se poate rezolva și geometric.

Coborîm perpendiculara DP din vîrful D al paralelogramului pe latura BC și ducem cele trei înălțimi în triunghiul BKH, care se intersectează în punctul E (fig. 215). Observăm că dacă translatăm triunghiul BKE astfel încît punctul K să ajungă în punctul D, atunci coincide complet cu triunghiul PDH, întrucît segmentul KE este paralel și egal cu DH (căci $EHDK$ este paralelogram), iar segmentul BK este paralel și egal cu PD. Prin urmare, $BE = PH$. Dar PH se găsește ușor din triunghiul dreptunghic KHP:

$$PH^2 = KP^2 - KH^2$$

unde $KP = BD = b$, $KH = a$. De aceea $BE = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Remarcăm că rezolvarea se potrivește și în cazul în care unghiul B este un unghi obtuz (ca în fig. 215) și pentru cazul în care B este ascuțit — în acest caz punctele K și H sînt situate pe prelungirile laturilor.

F.A. Bartenev

M 140. *Cu un număr natural (scris în sistemul zecimal) se fac următoarele operații:*
A) i se scrie la sfîrșit cifra 4;
B) i se scrie la sfîrșit cifra 0;
C) se împarte la 2 (dacă numărul este par).

De exemplu, dacă cu numărul 4 se fac succesiv operațiile C, C, A și B se obține numărul 140.
a) Cum se poate obține din numărul 4, numărul 1972?
b) Să se demonstreze că din numărul 4 se poate obține orice număr natural.

A.K. Tolpîgo

a) În loc să obținem numărul 1972 din numărul 4 cu ajutorul operațiilor A, B, C vom obține din 1972 numărul 4 cu operațiile inverse:
A') tăierea cifrei 4 de la sfîrșit;
B') tăierea cifrei 0 de la sfîrșit;
C') înmulțirea numărului cu 2.

Vom încerca de fiecare dată de cîte ori este posibil să aplicăm operațiile A' și B' pentru ca să micșorăm numărul nostru. Vom obține: 1972 → 3944 → → 394 → 39 → 78 → 156 → 312 → 624 → 62 → 124 → 12 → 24 → 2 → 4.

Evident că citind acest șir de la capăt spre început vom obține rezultatul căutat. (Operația B' aici nu s-a folosit.)

b) Să demonstrăm că dacă cu fiecare număr N vom proceda la fel ca și cu 1972 (aplicînd operațiile A' sau B' și dacă este este cazul C'), atunci după cîțiva pași ajungem la numărul 4.

Pentru aceasta este suficient să se demonstreze că în șirul care se obține, fiecare număr, după un anumit număr de pași se transformă într-un număr mai mic (sau în numărul 4). De aici rezultă că în final trebuie să ajungem la numărul 4, pentru că nu se poate construi un șir infinit de numere naturale în care după fiecare număr să întîlnim un număr mai mic.

Astfel, să ne convingem că orice număr, după un număr de operații A', B', C' se poate micșora (sau să ajungem de la el la 4 și acest caz nu-l vom considera separat).

Dacă ultima cifră a numărului este 0 sau 4, atunci după aplicarea lui A' sau B' el se micșorează cel puțin de 10 ori.

Să presupunem că ultima cifră este diferită de 0 sau 4. În tabelul 1 se arată cum se schimbă ultima cifră prin aplicarea operației C' (operația C', adică mărirea numărului de două ori o notăm cu o săgeată mai lungă, posibilitatea de aplicare a operațiilor A' sau B' printr-o săgeată mai scurtă:

Tabelul 1

$$0 \to \longrightarrow$$
$$1 \to 2 \to 4 \longrightarrow$$
$$2 \to 4 \longrightarrow$$
$$3 \to 6 \to 2 \to 4 \longrightarrow$$
$$4 \to \longrightarrow$$
$$5 \to 0 \longrightarrow$$
$$6 \to 2 \to 4 \longrightarrow$$
$$7 \to 4 \longrightarrow$$
$$8 \to 6 \to 2 \to 4 \longrightarrow$$
$$9 \to 8 \to 6 \to 2 \to 4 \longrightarrow$$

Din acest tabel se vede că dacă numărul N se termină în orice cifră afară de 9, atunci după cel mult trei aplicări ale lui C', adică după o mărire de cel mult 8 ori, i se poate aplica A' sau B', adică să se micșoreze de cel puțin 10 ori. Ca rezultat din N se obține un număr care nu depășește pe $\frac{8}{10} N < N$.

Rămîne să fie examinate numai numerele N care se termină în 9, care pînă la aplicarea lui A' se măresc de 16 ori. Observăm că oricare ar fi precedenta cifră înainte de 9 a numărului N, penultima cifră a numărului

$$16N = 16(10a + 9) = 160a + 144$$

este cu soț.

Dacă această cifră nu este 8, atunci $16N$, după A' și cel mult două operații C' se transformă din nou într-un număr cu cifra 0 sau 4 la sfîrșit, pe care-l putem micșora cel puțin de 10 ori. Ca rezultat, din N se obține un număr care nu depășește pe

$$\frac{16 \cdot 4N}{100} < N.$$

A mai rămas cazul în care $16N$ se termină în 84. Observăm că oricare ar fi cifra înainte de 8 a acestui număr, după operațiile:
$16N = \ldots 84 \to 10b + 8 \to \to \hookrightarrow 80b + 64 \to 8b + 6$ vom obține un număr care se termină cu o cifră cu soț.

Dacă această cifră nu este 8, atunci după cel mult două operații C vom obține un număr cu 0 sau 4 la sfîrșit, îi eliminăm și ca rezultat obținem un număr care nu depășește pe $\frac{16 \cdot 8 \cdot 4}{1\,000} N < N$. Dacă această cifră este 8, atunci după trei operații C' vom obține un număr cu penultima cifră cu soț și din el

(după A', şi cel mult trei de C' şi eliminarea ultimei cifre) un număr care nu depăşeşte pe

$$\frac{16 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{10\,000} N = \frac{8\,192}{10\,000} N < N.$$

Afirmaţia este demonstrată şi problema este rezolvată.

Încercaţi să aplicaţi cele de mai sus pentru numărul 1249 pe care cu ajutorul operaţiilor A', B', C' să-l reduceţi la 4 (este unul dintre cele mai „neplăcute" numere). O altă rezolvare se bazează pe procedeul care permite ca din orice număr par să se obţină un număr par mai mic (acest lucru este suficient pentru rezolvarea problemei). E suficient să se considere cinci cazuri: 1) $10k \to k$; 2) $10k + 2 \to 20k + 4 \to 2k$; 3) $10k + 4 \to k \to 2k$; 4) $10k + 6 \to 20k + 10 + 2 \to 40k + 20 + 4 \to 4k + 2$; 5) $10k + 8 \to 20k + 10 + 6 \to \to 40k + 30 + 2 \to 80k + 60 + 4 \to 8k + 6$.

N.B. Vasiliev

M 141. *Luăm pe înălţimea BH a triunghiului ABC un punct arbitrar P. Fie K punctul de intersecţie a dreptelor AP şi BC, L punctul de intersecţie a dreptelor CP şi AB. Să se demonstreze că segmentele KH şi LH formează unghiuri egale cu înălţimea BH (fig. 216).*

E.V. Sallinen

Această problemă se rezolvă uşor cu ajutorul unor noţiuni de geometrie analitică. Ca axe de coordonate este bine să se aleagă dreapta AC şi înălţimea HB a triunghiului (H originea). Vom nota coordonatele punctelor aşa cum se vede în figura 217 (în acest desen $a < 0$ şi $c > 0$). Vom folosi următoarea lemă.

Ecuaţia dreptei care intersectează axa Hx în punctul $(x_0, 0)$ şi axa Hy în $(0, y_0)$ este de forma

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1. \qquad (1)$$

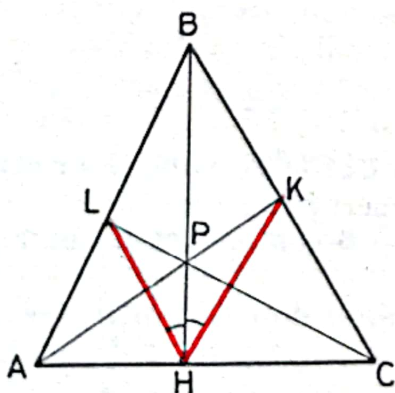


Fig. 216

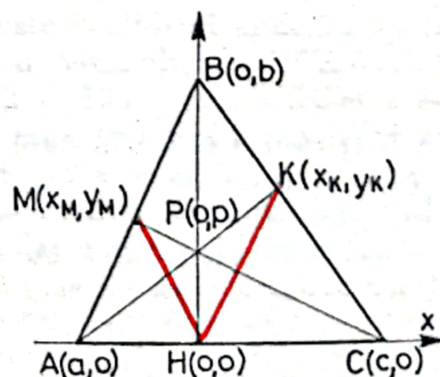


Fig. 217

Întrucît prin două puncte trece numai o singură dreaptă, pentru demonstrația lemei este suficient să se verifice că dreapta (1) trece prin fiecare dintre aceste puncte.

Din lemă rezultă că coordonatele (x_K, y_K) ale punctului de intersecție a dreptelor AP și BC se obține ca soluția sistemului de ecuații

$$\begin{cases} \frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{p} = 1. \end{cases} \tag{2}$$

În mod analog, coordonatele (x_M, y_M) reprezintă soluția sistemului:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x}{c} + \frac{y}{p} = 1. \end{cases}$$

Ne interesează coeficienții unghiulari ai dreptelor HK și HM — care sînt tangentele unghiurilor de înclinare a acestor drepte față de axa Hx. Scăzînd termen cu termen o ecuație a sistemului (2) din cealaltă, vom găsi:

$$x_K\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) + y_K\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{p}\right) = 0$$

de unde

$$\operatorname{tg} \sphericalangle KHx = \frac{y_k}{x_k} = \frac{(a-c)bp}{ac(b-p)}. \tag{3}$$

Analog

$$\operatorname{tg} \sphericalangle MHx = \frac{Y_M}{x_M} = \frac{(c-a)bp}{ac(b-p)}. \tag{4}$$

Observăm că acești coeficienți unghiulari sînt egali în valoare absolută și de semne contrare. De aici rezultă că dreptele KH și MH formează unghiuri congruente cu dreapta BH (și simetrice unul față de altul relativ la această dreaptă).

Desigur că aceleași formule (3) și (4) puteau fi obținute fără a introduce sistemul de coordonate considerînd mai multe perechi de triunghiuri asemenea. Se mai poate rezolva problema folosind teorema sinusurilor. Un avantaj al utilizării metodei analitice (în afară de scurtimea demonstrației) constă în faptul că nu trebuie să analizăm diferite așezări ale punctelor: rezolvarea este valabilă și în cazul în care unul dintre unghiurile A sau C este obtuz; ea nu merge numai în cazul „degenerat" în care unul dintre aceste unghiuri este drept, adică a sau c este zero; în acest caz ambele puncte K și M sînt situate pe dreapta BH așa că afirmația problemei este evidentă.

O altă rezolvare se bazează pe folosirea teoremei lui Ceva. Fie K_1 și M_1 punctele de intersecție a dreptelor HK și HM cu dreapta d care trece prin punctul B și este paralelă cu AC (fig. 218). Atunci pentru rezolvarea problemei este suficient să se demonstreze că $BK_1 = BM_1$

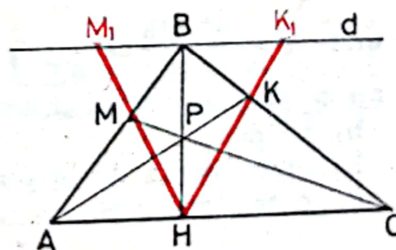


Fig. 218

(de unde va rezulta congruența $\sphericalangle BK_1H = \sphericalangle BM_1H$) dar din asemănarea triunghiurilor BKK_1 și CKH rezultă că

$$BK_1 = \frac{CH \cdot BK}{CK}$$

și analog

$$BM_1 = \frac{AH \cdot HM}{AM}$$

iar egalitatea cerută rezultă din următoarea teoremă.

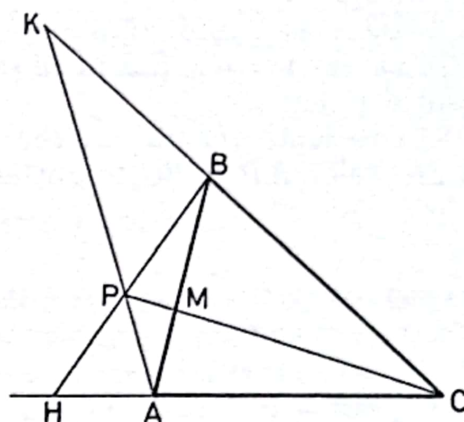


Fig. 219

T e o r e m a l u i C e v a. Dacă P este un punct din planul triunghiului ABC, iar K, H și M sînt respectiv punctele de intersecție a dreptelor AP și BC, BP și AC, CP și AB (fig. 219), atunci

$$AH \cdot BM \cdot CK = CH \cdot AM \cdot BK$$

Demonstrația teoremei.
Vom nota prin $S(ABC)$ aria triunghiului ABC. Atunci

$$\frac{AH}{CH} \cdot \frac{BM}{AM} \cdot \frac{CK}{BK} = \frac{S(APH)}{S(CPH)} \cdot \frac{S(BPM)}{S(APM)} \cdot \frac{S(CPK)}{S(BPK)} = \frac{S(APH)}{S(BPK)} \cdot \frac{S(BPM)}{S(CPH)} \cdot \frac{S(CPK)}{S(APM)} =$$

$$= \frac{PA \cdot PH}{PB \cdot PK} \cdot \frac{PB \cdot PM}{PC \cdot PH} \cdot \frac{PC \cdot PK}{PA \cdot PM} = 1.$$

Propunem cititorilor să enunțe și să demonstreze reciproca problemei M 141.

M 142. *a) Să se demonstreze că nu se pot numerota muchiile unui cub cu numerele 1, 2, ..., 12 astfel încît sumele numerelor corespunzătoare celor trei muchii care ajung în același vîrf să fie egale.*

b) Se poate elimina unul dintre numerele 1, 2, ..., 12, 13 astfel încît, dacă cu celelalte numere rămase numerotăm muchiile cubului să fie îndeplinită condiția de mai sus?

N.N. Constantinov, N.B. Vasiliev

a) Să presupunem că se pot aranja cele douăsprezece numere 1, 2, ...,12 pe muchiile unui cub astfel încît suma numerelor corespunzătoare muchiilor care ajung într-un vîrf să fie aceeași, egală cu s. Să adunăm cele opt astfel de sume corespunzătoare tuturor vîrfurilor cubului. În suma obținută de 24 de numere, fiecare dintre cele 12 numere 1, 2, ..., 12 intră de două ori pentru că fiecare muchie ajunge în două vîrfuri. Astfel

$$2(1 + 2 + ... + 12) = 8s$$

de unde $s = \frac{12 \cdot 13}{8} = \frac{39}{2}$; s rezultă neîntreg!. Contradicția obținută arată că nu se pot numerota muchiile în modul cerut.

b) Se poate.

Din rezolvarea de la punctul a) se vede că are sens să se elimine acel număr c pentru care

$$s = \frac{1 + 2 + ... + 13 - c}{4} = \frac{91 - c}{4}$$

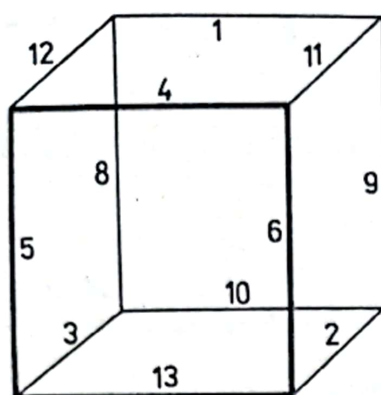
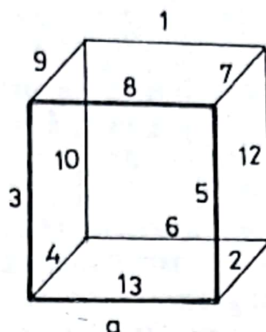


Fig. 220



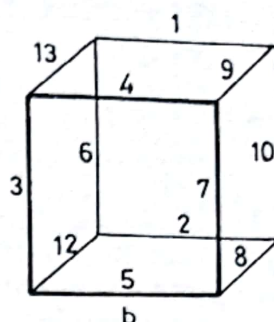


Fig. 221

este număr întreg, adică $c = 3$, $c = 7$ sau $c = 11$. Obţinem respectiv, $s = 22$, $s = 21$ sau $s = 20$.

Dar, evident, acest lucru nu este suficient. Pentru justificarea răspunsului este necesar un exemplu. Iată unul pentru $c = 7$ (fig. 220). În acest exemplu, fiecare pereche de numere simetrice faţă de 7 (k, $14 - k$) sînt scrise pe muchii simetrice faţă de centrul cubului.

Iubitorilor de probleme logice, care nu se sperie de luarea în considerare a unui număr destul de mare de variante le propunem să se gîndească la următoarele chestiuni: cîte moduri diferite de aşezare a numerelor 1, ..., 6, 8, ..., 13 pe muchiile cubului, astfel încît să satisfacă condiţiile problemei, există? (două moduri se consideră diferite dacă nu se pot obţine unul din celălalt printr-o rotaţie sau printr-o simetrie a cubului). Există aşezări ale numerelor pentru $c = 3$ sau $c = 11$? Iată cîteva indicaţii care ajută la construirea exemplelor respective şi la uşurarea căutărilor.

Aşezarea numerelor 1, 2, ..., 6, 8, ..., 13 din figura 220 este unică. Există două aşezări ale numerelor 1, ..., 10, 12, 13 (fig. 221 a, b) şi două aşezări ale numerelor 1, 2, 4, ..., 13; ele se obţin din cele precedente prin înlocuirea numerelor k prin „simetricele“ lor: $k \to 14 - k$.

Indicaţie. Este util să observăm diferite relaţii liniare simetrice care rezultă din cerinţa problemei. (De exemplu diferenţa numerelor de pe două muchii opuse ale unei feţe trebuie să fie egală cu diferenţa numerelor de pe celelalte două muchii paralele cu ele ş.a.m.d.).

Este mai util ca de la început să se scrie toate tripletele de numere care au suma S (de exemplu, pentru $S = 21$ există două triplete care conţin pe 13 şi nu-l conţin pe 7; 13, 6, 2; 13, 5, 4 şi două triplete „simetrice“ cu acestea care conţin numărul 1).

Fiecare dintre aceste abordări sau combinaţia lor permite să se organizeze în mod raţional căutarea variantelor, să se stabilească situaţiile menţionate mai sus şi să se demonstreze că altele nu există.

M 143. *Să se găsească cel mai mic număr natural n care satisface următoarea condiţie: dacă n se divide prin p — 1 şi p este prim, atunci n se divide prin p.*

Presupunem că n satisface această condiţie. Întrucît n se divide la $1 = 2 - 1$, el trebuie să se dividă la 2 dar atunci trebuie să se dividă la $3 = 2 + 1$ la $7 = 2\cdot 3 + 1$ şi la $43 = 2\cdot 3\cdot 7 + 1$. De aceea n trebuie să se dividă la $1806 = 2\cdot 3\cdot 7\cdot 43$.

Prin urmare, cel mai mic n (dacă există) nu e mai mic decît 1806. Pe de altă parte, pentru 1806 condiţia problemei este îndeplinită. Iată toţi divizorii numărului 1806:

$$1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 14,\ 21,\ 42,\ 43,\ 86,\ 129,\ 301,\ 1806. \tag{1}$$

Mărind fiecare dintre aceste numere cu o unitate, obținem:

$$2, 3, 4, 7, 8, 15, 22, 43, 44, 87, 130, 302, 1807. \quad (2)$$

Rămîne să alegem toate numerele prime din (2) și să vedem dacă intră în (1) (1807 nu e prim, se divide prin 13).

Răspuns 1806.

M 144. *Să se găsească condițiile necesare și suficiente pe care trebuie să le îndeplinească numerele a, b, α, β, astfel încît dreptunghiul $a \times b$ să se poată descompune în cîteva dreptunghiuri $\alpha \times \beta$.*

De exemplu, dreptunghiul 50×60 se poate descompune în dreptunghiuri de dimensiuni:

a) 20×15; *b)* 5×8; *c)* $6{,}25 \times 15$; *d)* $(2 - \sqrt{2}) \times (2 + \sqrt{2})$?

A.T. Kolotov

Rezolvarea completă a problemei este dată de următoarea teoremă.

Teoremă. Pentru ca dreptunghiul $a \times b$ să se poată descompune în dreptunghiuri $\alpha \times \beta$, este necesar și suficient să fie îndeplinite concomitent următoarele condiții:

1) fiecare dintre numerele α și β trebuie să fie de un număr întreg de ori mai mic decît cel puțin unul dintre numerele a, b.

2) fiecare dintre numerele a și b trebuie să poată fi scris în forma $m\alpha + n\beta$, unde m și n sînt numere naturale.

Demonstrație. Vom nota dreptunghiul mare prin R și cel mic prin ρ.

Suficiența. Dacă $a = n\alpha$, $b = m\beta$ (m și n numere naturale), atunci împărțind una dintre laturile dreptunghiului R la m părți și latura vecină în n părți egale și apoi ducînd prin punctele de diviziune drepte paralele cu laturile dreptunghiului R, îl vom împărți în dreptunghiuri congruente cu ρ (figura 222).

Dacă $a = n\alpha = m\beta$, atunci datorită condiției a doua, b admite o scriere de forma $b = k\alpha + l\beta$, unde k și l sînt numere naturale. Atunci, împărțind dreptunghiul R în două dreptunghiuri P și Q de dimensiuni $a \times k\alpha$, respectiv $a \times l\beta$, reducem acest caz la cel precedent (fig. 223).

Necesitatea. Necesitatea condiției a doua este evidentă. Vom demonstra necesitatea primei condiții. Sînt posibile două cazuri:

1. Numerele α și β sînt comensurabile. Atunci fără a limita generalitatea se poate considera că α, β, a și b sînt întregi, fiindcă acest lucru se poate realiza

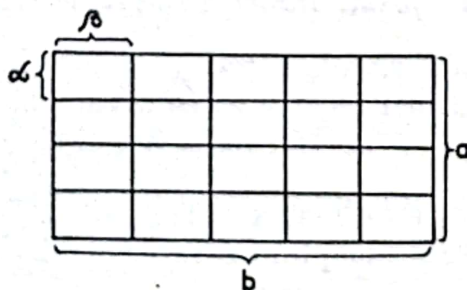


Fig. 222

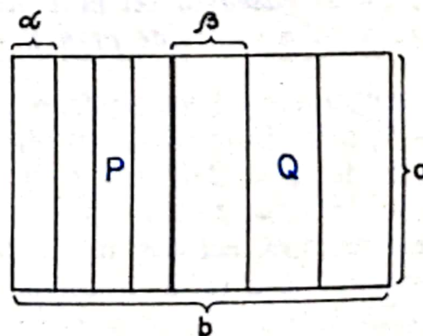


Fig. 223

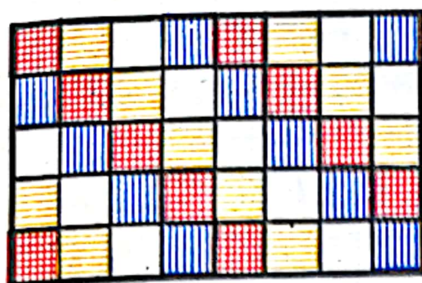


Fig. 224

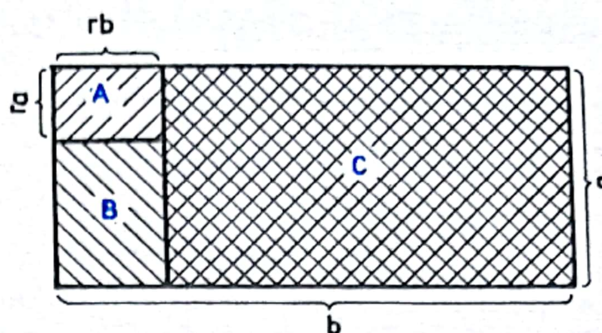


Fig. 225

printr-o alegere corespunzătoare a unității de măsură. Presupunem acum că afirmația noastră nu este adevărată și ca să precizăm, presupunem că nici a nici b nu se împart — fără rest — prin n. Împărțind dreptunghiul R în pătrate unitare, vom realiza în modul următor o colorare regulată a rețelei obținute în α culori diferite (o colorare se numește regulată dacă orice rînd format din α pătrate pe verticală sau pe orizontală, are toate cele α culori). Anume, vom colora cu aceeași culoare pătratele situate pe „diagonalele" care merg de sus în jos și de la stînga la dreapta, iar culorile le vom repartiza astfel încît două astfel de diagonale între care se află alte $\alpha - 1$, să fie colorate la fel. Se vede ușor că dacă reușim să realizăm descompunerea cerută a dreptunghiului R, atunci fiecare dintre cele α culori va apărea în același număr de pătrate în fiecare dintre dreptunghiurile obținute și deci numărul pătratelor din întregul dreptunghi R colorate într-o anumită culoare, nu depinde de alegerea acestei culori (în figura 224 este prezentată o colorare regulată în 4 culori).

Fie r_a și r_b resturile obținute prin împărțirea lui a și b prin α. Vom descompune dreptunghiul R în trei dreptunghiuri A, B și C de dimensiuni $r_a \times r_b$, $(a - r_a) \times r_b$ și $a \times (b - r_b)$ astfel încît A să ocupe colțul din stînga sus al dreptunghiului inițial R, B să ocupe locul de sub A iar C să fie situat la dreapta lui A și B (fig. 225). În dreptunghiul B, fiecare culoare se găsește în același număr de pătrate fiindcă $a - r_a$ se împarte fără rest la α. Aceeași afirmație este adevărată și pentru dreptunghiul C. De aceea, în virtutea observației precedente ea trebuie să fie adevărată și pentru A.

Să examinăm acum dreptunghiul A mai amănunțit. Ne interesează cele trei diagonale ale sale dintre care una pleacă din colțul din stînga sus al lui A și este colorată în culoarea i_1, iar celelalte două sînt vecine cu ea și sînt colorate în culorile i_2 și i_α. Evident că fiecare dintre culorile menționate se pot întîlni în dreptunghiul A numai pe diagonalele menționate. Dar atunci, dacă $r_a \leqslant r_b$, numărul căsuțelor de culoare i_α este cu 1 mai mic decît numărul căsuțelor de culoare i_1 (fig. 226), dacă $r_a > r_b$, atunci numărul căsuțelor de culoare i_2 este cu 1 mai mic decît numărul căsuțelor de culoare i_1 (fig. 227). În ambele cazuri ajungem la o contradicție.

2. Fie α și β incomensurabile și ca să precizăm, fie $\alpha < \beta$. Dacă oricare două dreptunghiuri ale descompunerii sînt orientate la fel în raport cu laturile lui R (cu alte cuvinte, laturile mai mari ale acestor dreptunghiuri sînt paralele cu aceeași latură a dreptunghiului inițial), atunci afirmația teoremei este evidentă.

Vom demonstra că nu e posibil ca dreptunghiurile să aibă orientări diferite. Presupunînd contrarul, se poate considera fără a limita generalitatea, că chiar alăturate de baza dreptunghiului R sînt dreptunghiuri ρ de

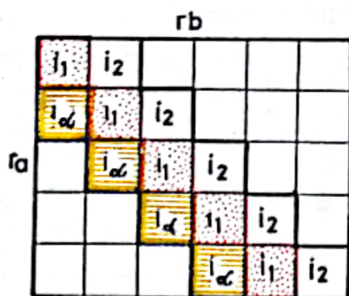


Fig. 226

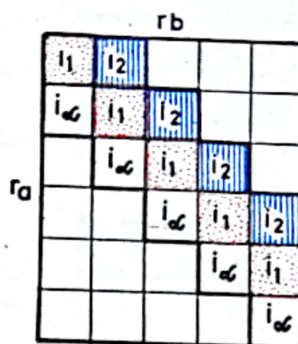
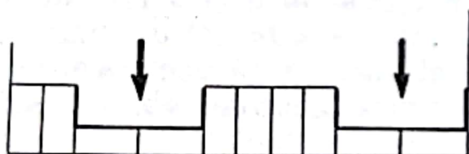
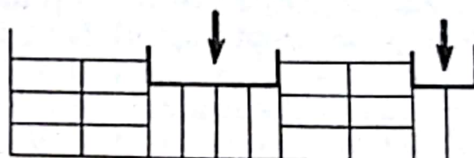


Fig. 227

orientări diferite. Vom descompune stratul de dreptunghiuri ρ alăturate bazei lui R în fragmente formate din dreptunghiuri la fel orientate astfel încît două fragmente vecine să aibă orientări diferite. Fiindcă oricare două fragmente vecine au înălţimi diferite, rezultă că dreptunghiurile oricărui fragment „inferior“ sînt pe fundul „puţului“ (fig. 228), ai cărui pereţi sînt formaţi din laturile din margini ale fragmentelor vecine. (Unul dintre pereţi poate fi desigur şi una dintre laturile dreptunghiului R).

Datorită incomensurabilităţii lui α şi β fiecare astfel de puţ poate fi umplut numai cu dreptunghiuri de aceeaşi orientare ca şi dreptunghiurile fragmentului care se găseşte pe fund. Imediat ce se reuşeşte umplerea acestor puţuri, fiecare dintre fostele fragmente „superioare“ devine el însuşi fundul unui „puţ“ ai cărui pereţi laterali sînt formaţi din laturile din margine ale complexelor vecine formate din dreptunghiuri de altă orientare care au umplut „puţurile“ precedente. După umplerea acestor noi puţuri se formează altele noi (figura 229) şi aşa mai departe.


Fig. 228


Fig. 229

De aceea, la fiecare pas, domeniul umplut cu dreptunghiuri va fi mărginit în partea superioară de o linie frîntă care are cel puţin o îndoitură şi deci umplerea întregului R cu dreptunghiuri ρ nu este posibilă.

Astfel teorema este complet demonstrată.

Acum să vedem în ce dreptunghiuri se poate descompune dreptunghiul 50×60.

a) În dreptunghiuri 20×15 se poate descompune (după teoremă).

b) În dreptunghiuri 5×8 nu se poate descompune, întrucît cu 8 nu se divide nici 50 nici 60.

c) Descompunerea în dreptunghiuri $6{,}25 \times 15$ este evidentă (ambele numere $50/6{,}25$ şi $60/15$ sînt întregi).

d) În dreptunghiuri $(2 + \sqrt{2}) \times (2 - \sqrt{2})$ nu se poate descompune (nu este îndeplinită prima condiţie a teoremei).

Încercaţi să găsiţi un exemplu în care este îndeplinită condiţia (1) şi nu este îndeplinită condiţia (2).

M 145. *A i-a promis lui B că-i va plăti în medie $\sqrt{2}$ lei pe zi. Ei au convenit ca în ziua n — a, B să primească un număr întreg a_n de lei, a_n egal cu 1 sau cu 2, astfel încît suma primită după primele n zile să fie cît mai aproape posibil de $n\sqrt{2}$.*

De exemplu, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$. Să se demonstreze că şirul $a_1, a_2, a_3, \ldots$, este neperiodic.

A.K. Tolpigo

Ideea demonstraţiei constă în următoarele. Să presupunem că începînd cu un anumit număr $N + 1$ acest şir este periodic şi fie T perioada sa, adică $a_{N+T+1} = a_{N+1}$, $a_{N+T+2} = a_{N+2}$ ş.a.m.d. Atunci, după fiecare T zile care urmează după N, B va primi una şi aceeaşi sumă de lei

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+T} = c \qquad (1)$$

De aceea, în medie (după un interval mare de timp) el va primi cîte $\frac{c}{T}$ lei pe zi. Dar după regula de construire a şirului a_n, el trebuie să primească în medie $\sqrt{2}$ lei pe zi. Ajungem la o contradicţie: egalitatea

$$\frac{c}{T} = \sqrt{2} \qquad (2)$$

nu este posibilă, întrucît numărul $\sqrt{2}$ este iraţional iar c şi T sînt numere naturale.

Această idee se transformă într-o demonstraţie riguroasă, de exemplu astfel:

Vom nota $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = s_n$. Întrucît $n\sqrt{2}$ este iraţional şi s_n este cel mai apropiat număr întreg de $n\sqrt{2}$ (fig. 230) rezultă că

$$|s_n - n\sqrt{2}| < 1/2. \qquad (3)$$

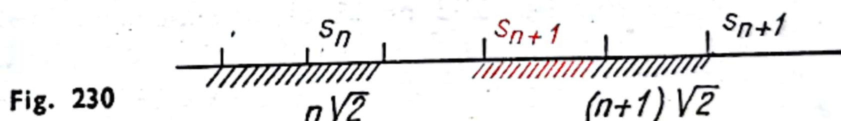


Fig. 230

Presupunînd că pentru $n > N$ şirul a_n este periodic şi folosind notaţia (1) pentru orice număr natural m vom avea

$$s_{N+mT} = s_N + mc \qquad (4)$$

Aplicînd (3) la $n = N + mT$ şi ţinînd cont de (4), vom obţine

$$|s_N + mc - N\sqrt{2} - mT\sqrt{2}| < 1/2$$

de unde, folosind inegalitatea $|\alpha + \beta| \geqslant |\alpha| - |\beta|$ şi împărţind la mT, obţinem

$$\left|\frac{c}{T} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2mT} + \frac{|s_N - N\sqrt{2}|}{mT} < \frac{1}{mT}.$$

Această inegalitate trebuie să fie îndeplinită pentru orice m. De aici rezultă că partea stîngă a inegalităţii trebuie luată egală cu 0 (aici se foloseşte următoarea proprietate evidentă a numerelor reale: dacă $\alpha > 0$, $\beta > 0$ atunci

există un număr natural m astfel încît $m\alpha > \beta$, proprietate numită „axioma lui Arhimede") adică ajungem la egalitatea (2) care nu este adevărată pentru c şi T numere naturale.

N.B. Vasiliev

M 146. *În vîrfurile unui heptagon regulat sînt aşezate fise albe şi negre. Să se demonstreze că există trei fise de aceeaşi culoare care să fie situate în vîrfurile unui triunghi isoscel.*

b) Este adevărată o afirmaţie analoagă pentru un octogon?

c) Să se stabilească pentru ce poligoane regulate cu n laturi este adevărată afirmaţia analoagă şi pentru care nu.

A. Romanov

a) Evident că printre cele 7 vîrfuri se găsesc două vîrfuri alăturate cu fise de aceeaşi culoare (dacă culorile ar alterna, poligonul ar trebui să aibă un număr par de laturi).

Vom nota aceste vîrfuri prin A_1 şi A_2. Putem presupune că în ele sînt fise albe (fig. 231). Observăm că există trei vîrfuri astfel încît fiecare dintre ele împreună cu A_1 şi A_2 să formeze triunghiuri isoscele. Aceste vîrfuri le vom nota A_0, A_3 şi B. Dacă într-unul dintre ele este o fisă albă, atunci respectivul triunghi $A_0A_1A_2$, $A_3A_1A_2$ sau BA_1A_2 este cel căutat. Dacă în fiecare dintre aceste vîrfuri este cîte o fisă neagră, atunci triunghiul A_0A_3B este cel căutat.

Acelaşi raţionament este valabil pentru orice poligon regulat cu n laturi, n impar, $n \geqslant 5$ (în rolul lui A_0 şi A_3 intră vîrfurile vecine cu A_1 şi A_2 iar în rolul lui B, vîrful de la mijlocul celui mai mare arc A_1A_2).

b) Pentru $n = 8$ afirmaţia nu este adevărată. Un exemplu de aşezare a fiselor astfel încît nici un triplet de fise de aceeaşi culoare să nu fie situat în vîrfurile unui triunghi isoscel, este reprezentat în fig. 232, a). Mai uşor se construiesc astfel de exemple pentru $n = 3$, 4 şi 6 (fig. 232, b), c), d)); sînt posibile şi alte exemple.

c) Răspuns: afirmaţia este adevărată pentru $n = 5$, $n = 7$ şi $n = 9$.

Exemplele din fig. 232 arată că afirmaţia nu este adevărată pentru $n = 3, 4, 6, 8$. Mai sus am demonstrat că este adevărată pentru $n = 5$, 7 şi pentru n impari şi mari. Să demonstrăm că ea este adevărată pentru toţi $n \geqslant 9$.

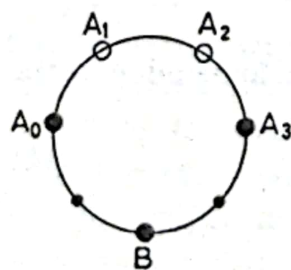


Fig. 231

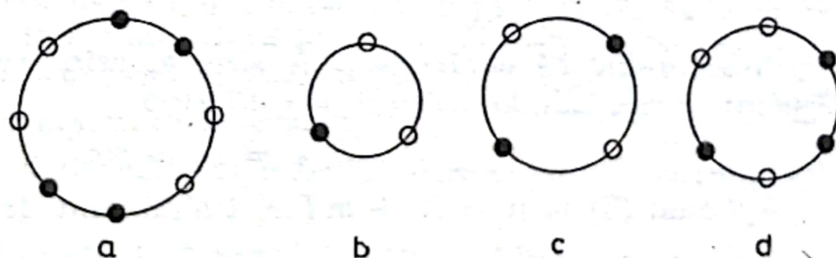


Fig. 232

Să presupunem că pentru o anumită aşezare a fiselor în vîrfurile unui poligon regulat cu n laturi, afirmaţia nu este adevărată. Înainte de toate e clar că undeva se vor găsi două fise vecine de aceeaşi culoare — dacă culorile alternează, atunci deja după cinci vîrfuri consecutive vom găsi un triunghi isoscel. Putem considera că acestea sînt vîrfurile A_4 şi A_5 cu fise de culoare albă (fig. 233). Atunci, în mod succesiv:

Considerăm	Tragem concluzia
$A_3A_4A_5$ şi $A_4A_5A_6$	A_3 şi A_6 negre
$A_3A_6A_9$	A_9 albă
$A_1A_5A_9$ şi $A_5A_7A_9$	A_1 şi A_7 negre
$A_1A_2A_3$ şi $A_6A_7A_8$	A_2 şi A_8 albe
$A_2A_5A_8$	contradicţie

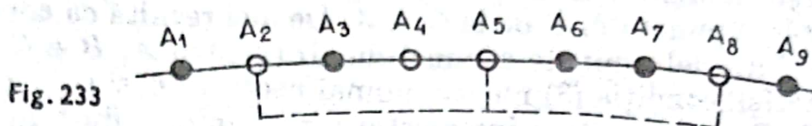


Fig. 233

Se poate arăta că este adevărată şi o afirmaţie mai tare: în orice descompunere a mulţimii 1, 2, ..., 9 în două submulţimi, cel puţin într-una dintre submulţimi se găsesc trei numere dintre care unul este semisuma celorlalte două. Am demonstrat această afirmaţie cu presupunerea suplimentară că 4 şi 5 aparţin unei submulţimi. Alte cazuri se judecă analog.

M 147. *Să se demonstreze că dacă patrulaterul inscriptibil ABCD este astfel încît tangentele la cercul circumscris în punctele A şi C se intersectează pe prelungirea diagonalei BD, atunci*

a) tangentele în punctele B şi D se intersectează pe prelungirea diagonalei AC;

b) bisectoarele interioare ale unghiurilor A şi C ale patrulaterului se intersectează pe diagonala BD (iar ale unghiurilor B şi D pe AC).

I.F. Sarighin

a) Fie A, B şi C trei puncte pe un cerc şi K punctul de intersecţie a tangentelor duse în punctele A şi C. Vom găsi condiţia care determină poziţia punctului D de intersecţie a dreptei BK cu cercul (fig. 234).

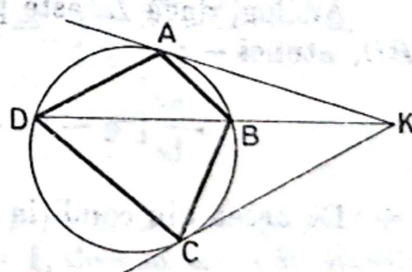


Fig. 234

$\triangle ABK \backsim \triangle DAK$; unghiul K este comun iar $\sphericalangle BAK = \sphericalangle ADK$ întrucît fiecare dintre acestea au ca măsură jumătatea măsurii arcului AB. Deci:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BK}{AK} = \frac{AK}{DK} \qquad (1)$$

(pe drum am demonstrat cunoscuta teoremă $AK^2 = BK \cdot KD$).

În mod analog, $\triangle CBK \backsim \triangle DCK$ şi deci

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BK}{CK} = \frac{CK}{DK}. \qquad (2)$$

Ultimele rapoarte din (1) şi (2) sînt egale deci

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}. \qquad (3)$$

Observăm că raportul AD/CD crește monoton odată cu deplasarea punctului D pe arcul cercului de la A la C. Într-adevăr, după teorema sinusurilor aplicată la triunghiul ACD (fig. 235) rezultă:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{\sin \sphericalangle C}{\sin \sphericalangle A} = \frac{\sin (180° - \sphericalangle D - \sphericalangle A)}{\sin \sphericalangle A} =$$

$$= \sin(180° - \sphericalangle D) \cdot \operatorname{ctg} \sphericalangle A - \cos(180° - \sphericalangle D)$$

aici, $180° - \sphericalangle D$ este o mărime constantă, $\sin (180° - \sphericalangle D) > 0$ și $\operatorname{ctg} \sphericalangle A$ descrește monoton la creșterea unghiului A de la $0°$ la $180° - \sphericalangle D$ adică la deplasarea punctului D de la C la A. De aici rezultă că condiția (3) corespunde unei poziții determinate a punctului D (pentru A, B și C dați).

Astfel, condiția (3) nu este numai necesară ci și suficientă pentru ca punctele B, D și punctul de intersecție a tangentelor duse în punctele A și C să fie situate pe o dreaptă.

La fel se poate demonstra că condiția necesară și suficientă pentru ca tangentele duse în punctele B și D să se intersecteze pe dreapta AC, se poate scrie astfel:

$$\frac{BA}{DA} = \frac{BC}{DC} \tag{3'}$$

Dar condițiile (3) și (3′) evident coincid: și (3) și (3′) pot fi scrise în formă simetrică

$$AB \cdot CD = BC \cdot AD.$$

Acest lucru face afirmația problemei a) evidentă.

b) Fie L_1 punctul de intersecție a bisectoarei unghiului A al triunghiului BAD cu dreapta BD (fig. 236). Atunci, așa cum se știe:

$$\frac{BL_1}{L_1D} = \frac{AB}{AD}.$$

Analog, dacă L_2 este punctul de intersecție a bisectoarei unghiului C cu BD, atunci

$$\frac{BL_2}{L_2D} = \frac{BC}{CD}.$$

De aceea din condiția (3) rezultă că

$$\frac{BL_1}{L_1D} = \frac{BL_2}{L_2D}.$$

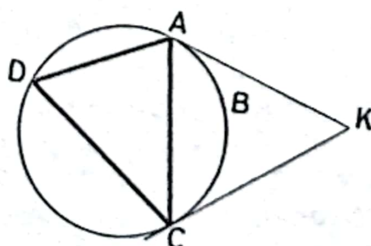


Fig. 235

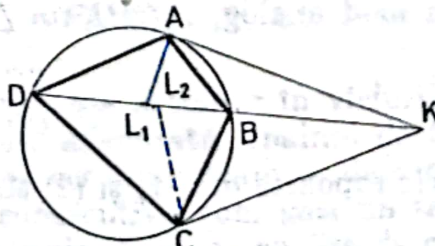


Fig. 236

Dar fiecărei valori a raportului $\frac{BL}{DL}$ îi corespunde un punct L pe segmentul BD întrucît prin deplasarea punctului L de la B la D această mărime crește monoton. De aceea punctele L_1 și L_2 coincid.

M 148. *Șirul $x_0, x_1, x_2, \ldots$, este determinat de următoarele condiții: $x_0 = 1$, $x_1 = \lambda$ și pentru orice $n > 1$, $(\alpha + \beta)^n x_n = \alpha^n x_n x_0 + \alpha^{n-1} \beta x_{n-1} x_1 + \alpha^{n-2}\beta^2 x_{n-2} x_2 + \ldots + \beta^n x_0 x_n$. Aici λ, α, β sînt numere pozitive date. Să se găsească expresia lui x_n și să se stabilească pentru ce n, mărimea lui x_n va fi maximă.*

A.L. Lopșiț

Vom scrie egalitățile care-l determină pe x_n pentru cîteva dintre primele valori ale lui $n > 1$ (folosind condiția $x_0 = 1$):

$$[(\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2]x_2 = \alpha\beta x_1^2$$
$$[(\alpha + \beta)^3 - \alpha^3 - \beta^3]x_3 = \alpha^2\beta x_2 x_1 + \alpha\beta^2 x_1 x_2,$$
$$[(\alpha + \beta)^4 - \alpha^4 - \beta^4]x_4 = \alpha^3\beta x_3 x_1 + \alpha^2\beta^2 x_2^2 + \alpha\beta^3 x_1 x_3.$$

De aici vom găsi (folosind condiția $x_1 = \lambda$)

$$x_2 = \frac{\lambda^2}{2}, \quad x_3 = \frac{\lambda^3}{2 \cdot 3}, \quad x_4 = \frac{\lambda^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Este natural să presupunem că

$$x_n = \frac{\lambda^n}{n!}.$$

vom demonstra prin inducție că presupunerea este adevărată. Presupunînd că $x_k = \frac{\lambda^k}{k!}$ pentru toți $k \leqslant n - 1$, rezultă

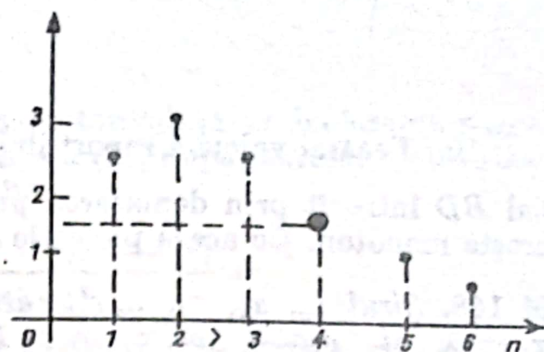
$$[(\alpha + \beta)^n - \alpha^n - \beta^n]x_n = \sum_{k=1}^{k=n-1} \alpha^{n-k}\beta^k x_{n-k} x_k = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{\alpha^{n-k}\beta^k\lambda^{n-k}\lambda^k}{(n-k)!k!} =$$
$$= \frac{\lambda^n}{n!}\sum_{k=1}^{k=n-1} C_n^k \alpha^{n-k}\beta^k = [(\alpha + \beta)^n - \alpha^n - \beta^n]\frac{\lambda^n}{n!}.$$

De aici rezultă că $x_n = \lambda^n/n!$ pentru că $\alpha > 0$ și $\beta > 0$ și factorul comun din ambii membri este pozitiv pentru $n > 1$, deci nenul și se simplifică.

Să vedem pentru ce n, valoarea lui x_n este maximă. Inegalitatea

$$\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{\lambda^n}{n!}$$

este echivalentă cu $n \leqslant \lambda$. Astfel, la trecerea de la $n - 1$ la n, numărul x_n se mărește dacă $n < \lambda$, și se micșorează dacă $n > \lambda$. De aici obținem răspunsul la întrebarea problemei: x_n ia cea mai mare valoare pentru $n = [\lambda]$ ($[\lambda]$ este întregul cel mai mare mai mic sau egal cu λ); dacă λ este număr întreg, atunci $x_{[\lambda]-1} = x_{[\lambda]}$ sînt cele două valori maxime ale șirului.



M 149. *Fie O punctul de intersecție a diagonalelor patrulaterului ABCD. Să se demonstreze că*

a) dacă perimetrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA și DAB sînt egale, atunci ABCD este un dreptunghi.

b) dacă sînt egale perimetrele triunghiurilor ABO, BCO, CDO și DAO atunci ABCD este romb.

N.B. Vasiliev

a) Vom nota laturile și diagonalele patrulaterului așa cum se vede în figura 237. Din egalitățile

$$x_1 + x_2 + y_1 = x_3 + x_4 + y_1.$$

$$x_2 + x_3 + y_2 = x_1 + x_4 + y_2$$

adunîndu-le și scăzîndu-le, vom găsi:

$$x_2 = x_4, \ x_1 = x_3.$$

Prin urmare, *ABCD* este paralelogram.

Din egalitatea

$$x_1 + x_2 + y_1 = x_2 + x_3 + y_2 = x_2 + x_1 + y_2,$$

rezultă că $y_1 = y_2$ rezultă că *ABCD* este dreptunghi.

b) Vom lua pe fiecare dintre diagonalele *AC* și *BD* pe cel mai mare dintre segmentele formate pe ele de punctul *O*. Se poate considera, schimbînd dacă e nevoie notațiile, că $AO \geqslant OC$, $BO \geqslant OD$ (fig. 238). Atunci perimetrul triunghiului *AOB* nu este mai mic decît perimetrul triunghiului *COD*, iar egalitatea este posibilă numai dacă $AO = OC$ și $BO = OD$ (pentru ca să ne convingem de acest lucru, este suficient să construim triunghiul *A'OB'*.

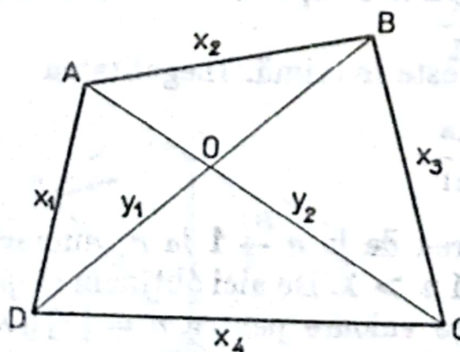


Fig. 237

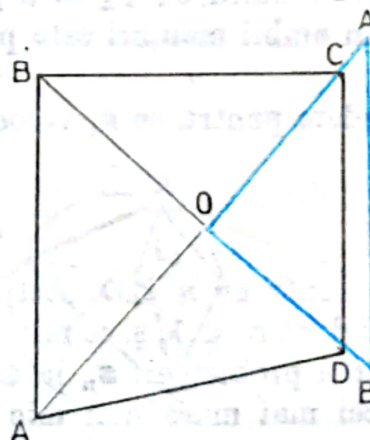


Fig. 238

simetric cu triunghiul AOB față de punctul O; $A'OB'$ acoperă pe COD). Dar dacă $AO = OC$ și $BO = OD$, atunci din egalitatea perimetrelor, rezultă deodată că $AB = BC = CD = DA$ adică $ABCD$ este romb.

N.B. Vasiliev

M 150. *Din numerele 1, 2, ..., k se formează toate grupările posibile* $(a_1, a_2, .., a_n)$ *de lungime n (se vede ușor că ele sînt* k^n*). Se aleg două submulțimi P și Q ale mulțimii tuturor acestor grupări (aceeași grupare poate să intre și în P și în Q). Se știe că dacă se ia o grupare arbitrară din P* $(p_1, p_2, ..., p_n)$ *și o grupare arbitrară din Q* $(q_1, q_2, ..., q_n)$*, atunci ele vor avea cel puțin un element comun (adică, pentru un anumit i,* $p_i = q_i$*). Atunci, sau în P sau în Q nu vor fi mai mult de* k^{n-1} *grupări.*

Să se demonstreze această afirmație.

a) pentru $k = 2$ *și orice n;*

b) pentru $n = 1, 2, 3$ *și orice k;*

c) pentru orice $k \geqslant 2$ *și* $n \geqslant 1$.

Încercați să găsiți și alte limitări ale numărului de elemente din mulțimile P și Q, supuse la această condiție.

V.B. Alekseev

a) $k = 2$. Vom numi gruparea $\bar{d}$, opusă grupării d, dacă $\bar{d}$ este obținut din d prin înlocuirea tuturor cifrelor 1 prin 2 și a cifrelor 2 prin 1. Vom nota prin $\bar{M}$ mulțimea tuturor grupărilor formate din grupări opuse celor din M. Grupările d și $\bar{d}$ nu au în nici o poziție același număr. De aceea, dacă d intră în P atunci $\bar{d}$ nu poate intra în Q. Înseamnă că $\bar{P}$ și Q nu conțin aceleași grupări. De aceea, sau în $\bar{P}$ sau în Q nu sînt mai mult de jumătate dintre toate grupările. Dar în P și $\bar{P}$ sînt grupări în număr egal. Înseamnă că sau în P sau în Q nu sînt mai multe decît jumătate din toate grupările, adică nu sînt mai multe decît 2^{n-1} grupări.

b) Pentru $n = 1$, afirmația este evidentă.

Pentru $n = 2$ problema poate fi formulată astfel: k^2 puncte sînt aranjate în plan în nodurile unei rețele pătrate $(k - 1) \times (k - 1)$ (fig. 239). Unele dintre aceste puncte trebuie desenate cu cerculețe pline (grupa I), altele cu cerculețe avînd contur îngroșat (grupa II) albastru, astfel încît fiecare dintre punctele grupei I și fiecare dintre punctele grupei II să fie situat sau într-o singură linie sau într-o singură coloană (adică situația c) nu e posibilă). Un punct poate face parte din ambele categorii (cazul d). Trebuie să se demonstreze că punctele de o anumită categorie nu sînt mai multe decît k. Figurile a) și b) corespund următoarelor două cazuri.

1) În submulțimea P sînt două astfel de grupări (a_1, a_2) și (b_1, b_2) încît $a_1 \neq b_1$ și $a_2 \neq b_2$.

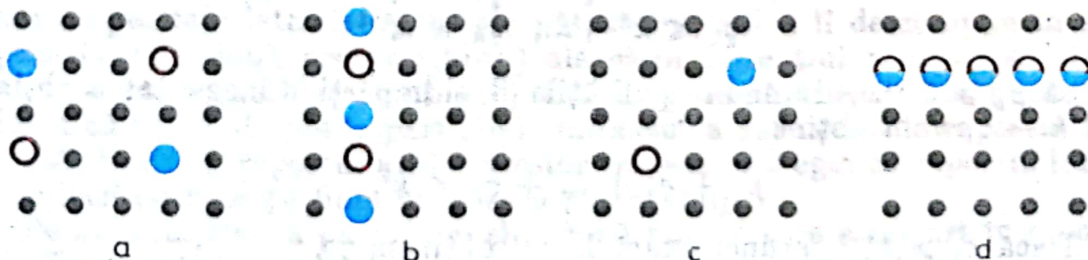


Fig. 239

Atunci în Q pot intra numai 2 grupări (a_1, b_2) şi (b_1, a_2). Dar $2 \leqslant k$ şi afirmaţia este adevărată.

2) În submulţimea P orice două grupări coincid într-un loc (pentru a preciza, în primul).

Atunci orice grupare din P are forma (a, b) unde a este fixat. Dar astfel de grupări nu sînt mai multe decît k.

În mod asemănător, dar printr-o cercetare mult mai lungă a tuturor cazurilor, se poate demonstra afirmaţia şi pentru $n = 3$. Vom considera direct cazul general.

c) Presupunem că P conţine p grupări şi Q conţine q grupări. Vom demonstra prin inducţie după n, pentru k fixat, afirmaţia mai tare: dacă $p \geqslant k^{n-1}$ atunci, dacă sînt îndeplinite ipotezele problemei, $p + (k-1)q \leqslant k^n$. De aici va rezulta că dacă $p \geqslant k^{n-1}$, atunci $q \leqslant k^{n-1}$.

Dacă $n = 1$, atunci după ipoteză $p \geqslant 1$. Dacă $p = 1$, atunci $q \leqslant 1$. Dacă $2 \leqslant p \leqslant k$, atunci $q = 0$. În orice caz $p + (k-1)q \leqslant k$.

Presupunem că pentru $n = s$ afirmaţia este demonstrată. Să considerăm $n = s + 1$. Fie $p \geqslant k^s$. Trebuie să se demonstreze că $p + (k-1)q \leqslant k^{s+1}$. Vom nota prin P_1 mulţimea tuturor grupărilor din P care se termină cu cifra 1. Eliminînd din grupările lui P_1 ultima cifră 1, vom obţine mulţimea P'_1 a grupărilor de lungime s. Numărul grupărilor din P_1 (egal cu cele din P'_1) îl notăm prin p_1. În mod analog considerăm mulţimile $P_2, \ldots, P_k$ (formate din grupările care se termină în $2, \ldots, k$), mulţimile $P'_2, \ldots, P'_k$, $Q_1, \ldots, Q_k$; $Q'_1, \ldots, Q'_k$ şi numerele $p_2, \ldots, p_k$; $q_1, \ldots, q_k$. După ipoteza problemei orice două grupări din P_r şi Q_t coincid cel puţin într-un loc, dar dacă $r \neq t$ ele nu pot să coincidă în ultima poziţie, de aceea orice două grupări din P'_r şi Q'_t pentru $r \neq t$ coincid cel puţin într-un loc. Fiindcă $p \geqslant k^s$, atunci $p_i \geqslant k^{s-1}$ cel puţin pentru un p_i (fiindcă grupările din P s-au descompus în k grupări). Se poate considera că

$$p_1 > k^{s-1}, \ldots, p_m \geqslant k^{s-1}, \; p_{m+1} < k^{s-1}, \ldots, p_k < k^{s-1} \tag{1}$$

Vom considera două cazuri:

1) $m = 1$, adică

$$p_1 \geqslant k^{s-1}, \; p_2 < k^{s-1}, \ldots, p_k < k^{s-1}. \tag{2}$$

Din cele spuse mai sus despre P'_r şi Q'_t şi din presupunerea de inducţie rezultă următoarele inegalităţi:

$$\begin{cases} p_1 + (k-1)q_2 \leqslant k^s \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1(k-1)q_k \leqslant k^s \end{cases} \tag{3}$$

Din aceste inegalităţi rezultă că

$$q_2 \leqslant k^{s-1}, \ldots, \; q_k \leqslant k^{s-1} \tag{4}$$

fiindcă $p_1 \geqslant k^{s-1}$. Adunînd inegalităţile (3) şi împărţind inegalitatea obţinută prin $k - 1$, vom obţine

$$p_1 + q_2 + \ldots + q_k \leqslant k^s. \tag{5}$$

Dacă $q_1 \geqslant k^{s-1}$, atunci exact la fel obţinem

$$q_1 + p_2 + \ldots + p_k \leqslant k^s \tag{6}$$

Adunînd (5) şi (6), obţinem $p + q \leqslant 2 \cdot k^s$, şi fiindcă $p \geqslant k^s$, rezultă

$$q \leqslant k^s. \tag{7}$$

Dacă $q_1 < k^s$, atunci inegalităţile (5) şi (6) cu atît mai mult sînt îndeplinite datorită inegalităţilor (2) şi (4). În ambele cazuri, adunînd (5) cu (6) şi adăugînd (7) înmulţită cu $k - 2$, vom obţine

$$p + q + (k-2)q \leqslant 2 \cdot k^s + (k-2)k^s \text{ sau } p + (k-1)q \leqslant k^{s+1}.$$

2) $m > 1$. Atunci, ca şi în cazul 1) vom obţine:

$$\begin{cases} p_1 + q_2 + \dots q_k \leqslant k^s \\ p_2 + q_1 + q_3 + \dots + q_k \leqslant k^s \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_m + q_1 + \dots + q_{m-1} + q_{m+1} + \dots + q_k \leqslant k^s \end{cases} \tag{8}$$

şi

$$q_1 \leqslant k^{s-1}, q_2 \leqslant k^{s-1}, \dots, q_k \leqslant k^{s-1}. \tag{9}$$

Adunînd inegalităţile (8), obţinem

$$p_1 + \dots + p_m + (m-1)(q_1 + \dots + q_m) + m(q_{m+1} + \dots + q_k) \leqslant m \cdot k^s \tag{10}$$

Adăugînd la (10) inegalităţile din (1) pentru $p_{m+1}, \dots, p_k$ şi inegalităţile (9) dintre care primele m se înmulţesc cu $k - m$, iar celelalte cu $k - m - 1$, vom obţine

$$p_1 + \dots + p_k + (k-1)(q_1 + \dots + q_m) \leqslant m \cdot k^s + (k-m)k^{s-1} +$$
$$+ m(k-m)k^{s-1} + m(k-m)k^{s-1} + (k-m)(k-m-1)k^{s-1} =$$
$$= mk^s + (k-m)k^s = k^{s+1},$$

adică

$$p + (k-1)q \leqslant k^{s+1}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

B.V. Alekseev

M 151. *Se dau nouă drepte, astfel încît fiecare dintre ele împarte un pătrat dat în două patrulatere ale căror arii sînt în raportul 2 : 3. Să se demonstreze că cel puţin trei dintre cele nouă drepte trec prin acelaşi punct.*

B.M. Ivlev

Dacă o dreaptă intersectează două laturi vecine ale pătratului, atunci ea îl împarte într-un triunghi şi într-un pentagon. Dar din ipoteză rezultă că fiecare dintre cele 9 drepte împarte pătratul în patrulatere. Prin urmare aceste drepte taie laturile opuse ale pătratului, adică îl descompun în două trapeze (sau în două dreptunghiuri) ale căror baze sînt situate pe laturile opuse ale pătratului iar înălţimile sînt congruente cu laturile pătratului. Evident că aceste drepte împart „linia mijlocie" a pătratului în raportul 2 : 3 (fig. 240) întrucît raportul ariilor acestor trapeze este egal cu raportul liniilor lor mijlocii (situate pe linia mijlocie a pătratului).

Pe linia mijlocie a pătratului sînt două puncte care o împart în raportul 2 : 3. Considerînd şi celelalte două laturi opuse ale pătratului mai obţinem două puncte pe linia mijlocie paralelă cu acestea.

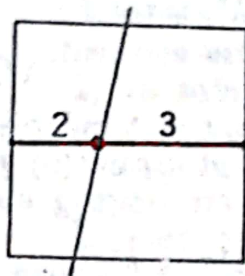
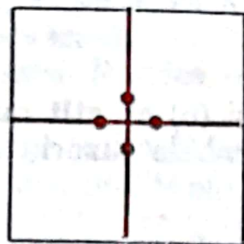


Fig. 240


Fig. 241

Ca rezultat, vom obține că fiecare dintre cele 9 drepte va trece printr-unul dintre cele 4 puncte menționate (fig. 241).

Printr-unul dintre cele 4 puncte, vor trece neapărat cel puțin trei drepte. Într-adevăr, dacă prin fiecare punct vor trece cel mult două drepte, atunci, în total vor fi $2 \cdot 4 = 8$ drepte ceea ce contrazice ipoteza.

Se poate indica o generalizare naturală a problemei : în loc de pătrat să considerăm un poligon cu $2n$ laturi astfel încît laturile opuse să fie paralele și dreptele, astfel încît fiecare dintre ele să împartă acest $2n$ – poligon în două poligoane cu $n + 2$ laturi de arii într-un raport dat.

Facem observația că dacă două laturi ale poligonului nu sînt paralele atunci dreptele care vor intersecta aceste laturi și vor descompune aria în raportul dat, nu vor mai trece printr-un punct (demonstrați!) ci vor fi tangente la o anumită hiperbolă.

B.M. Ivlev

M 152. *Fie a, b, m, n numere naturale și a prim cu b, $a > 1$. Să se demonstreze că dacă $a^m + b^m$ se divide prin $a^n + b^n$, atunci m se divide prin n.*

D. Iu. Grigoriev

Cerința problemei poate fi precizată. Vom demonstra nu numai că m se divide prin n, adică $m = kn$, unde k este un număr întreg dar și că numărul k este obligator, impar. Vom desface demonstrația în trei părți.

1°. Fie $m = kn$, unde k este impar. Atunci $a^m + b^m$ se divide prin $a^n + b^n$.

2°. Fie $m = kn + r$ unde k este un număr impar și $0 < r < n$. Atunci $a^m + b^m$ nu se divide prin $a^n + b^n$.

3°. Fie $m = pn + r$ unde p este un număr par și $0 \leqslant r \leqslant n$. Atunci $a^m + b^m$ nu se divide prin $a^n + b^n$.

Observăm că dacă vom demonstra 1°, 2°, 3° vom demonstra chiar mai mult și anume: pentru ca $a^m + b^m$ să se dividă prin $a^n + b^n$ este necesar și suficient ca m să fie egal cu kn, unde k este impar. La demonstrația punctelor 2° și 3° vom folosi faptul că a și b sînt prime între ele iar la demonstrația lui 1°, nu.

D e m o n s t r a ț i e. 1°. Fie c și d numere întregi arbitrare. Atunci $c^k + d^k$ unde $k > 0$, impar, se divide prin $c + d$ (De aici, pentru $c = a^n$ și $d = b^n$ se obține 1°). Într-adevăr, așa cum se vede ușor pentru k impar

$$c^k + d^k = (c + d)(c^{k-1} - c^{k-2}d + \ldots - cd^{k-2} + d^{k-1}).$$

D e m o n s t r a ț i e 2°. Vom scrie pe $a^m + b^m$ sub forma

$$a^{kn+r} + b^{kn+r} = a^r(a^{kn} + b^{kn}) + b^{kn}(b^r - a^r).$$

Conform lui 1° primul termen se divide prin $a^n + b^n$, al doilea termen nu se divide la $a^n + b^n$ fiindcă b^{kn} este prim cu $a^n + b^n$ și $0 < | b^r - a^r | < a^n + b^n$. Prin urmare, suma nu se divide prin $a^n + b^n$.

D e m o n s t r a ț i e 3°. Dacă p este un număr par, atunci $k = p - 1$ este un număr impar. Vom scrie pe $a^m + b^m$ sub forma

$$a^{pn+r} + b^{pn+r} = a^{kn}a^{n+r} + b^{kn}b^{n+r} = a^{n+r}(a^{kn} + b^{kn}) + b^{kn+r}(b^n + a^n) - b^{kn}a^n(b^r + a^r).$$

Primii doi termeni se împart la $a^n + b^n$, iar ultimul, ca și mai sus nu se împarte. Într-adevăr, $b^{kn}a^n$ este prim cu $a^n + b^n$ și $0 < b^r + a^r < a^n + b^n$.

Dați exemple care să arate că fără cerința ca a și b să fie prime între ele, afirmațiile 2° și 3° nu sînt adevărate.

V.L. Gutenmaher

M 153. *Două persoane joacă următorul joc. Unul spune o cifră, iar celălalt o pune după aprecierea sa în locul uneia dintre steluțele din scăderea următoare*

$$\begin{array}{r} **** \\ **** \\ \hline \end{array}$$

Apoi, primul din nou spune o cifră și așa mai departe de 8 ori pînă se înlocuiesc toate steluțele prin cifre. Cel care spune cifrele, vrea să obțină o diferență cît mai mare posibilă, iar al doilea ca diferența să fie cît mai mică posibilă. Să se demonstreze că:

a) al doilea poate să aranjeze cifrele astfel încît diferența obținută să nu depășească 400 indiferent ce cifre spune primul;

b) primul poate să spună astfel de cifre încît diferența să nu scadă sub 4 000 indiferent unde va așeza cifrele cel de al doilea.

Iu. I. Ionin

Vom da rezolvarea în cazul general în care pe fiecare linie nu sînt 4 ci n steluțe. Vom demonstra că în cazul jocului celui mai bun al partenerilor diferența va fi egală cu $4 \cdot 10^{n-1}$.

a) Strategia celui de al doilea jucător.

Dacă prima cifră spusă de primul jucător este 4 sau mai mică, al doilea jucător o pune în locul ordinului celui mai mare al descăzutului. Apoi, cum spune primul jucător o cifră diferită de zero, al doilea o pune la ordinul cel mai înalt al scăzătorului. Diferența nu va fi mai mare decît $\underbrace{499 \ldots 9}_{n} - \underbrace{100 \ldots 0}_{n} < 4 \cdot 10^{n-1}$. Dacă primul jucător, începînd cu a doua mișcare de fiecare dată spune 0, atunci diferența de asemenea va fi mai mică sau egală cu $4 \cdot 10^{n-1}$.

Dacă primul jucător începe cu cifrele 5, 6, 7, 8 sau 9, al doilea le pune în locul ordinului celui mai înalt al scăzătorului iar apoi înlocuiește ordinul cel mai înalt al descăzutului prin prima cifră numită, diferită de 9. Chiar dacă toate cifrele următoare sînt 9, tot se obține o diferență care nu depășește $4 \cdot 10^{n-1}$.

b) Strategia primului jucător.

Pînă cînd rămîn libere ordinele superioare ale descăzutului și scăzătorului, primul jucător spune cifrele 4 și 5. Începînd cu momentul în care al doilea jucător completează unul dintre cele două ordine superioare și pînă la sfîrșitul jocului, primul jucător spune 0, dacă mai înainte s-a completat ordinul superior al descăzutului și 9 în celălalt caz. Rămîne să se precizeze în ce cazuri primul jucător va spune cifra 4 și în ce caz va spune 5.

Înainte de mișcarea sa, primul jucător va pune în gînd zero în toate locurile necompletate Dacă după aceasta, diferența devine nenegativă, el va spune 4, dacă diferența va fi negativă va spune 5.

Să demonstrăm că strategia descrisă permite primului jucător să realizeze o diferență mai mare sau egală cu $4 \cdot 10^{n-1}$.

Dacă ordinul cel mai înalt al scăzătorului este ocupat de cifra 4, atunci la ordinul cel mai înalt al descăzutului va fi cifra 9:

$$\underbrace{900 \ldots 0}_{n} - \underbrace{499 \ldots 9}_{n} > 4 \cdot 10^{n-1}.$$

Dacă ordinul cel mai înalt al descăzutului este ocupat de cifra 5, atunci ordinul cel mai înalt al scăzătorului va fi ocupat de cifra 0 şi

$$\underbrace{500 \ldots 0}_{n} - \underbrace{099 \ldots 9}_{n} > 4 \cdot 10^{n-1}$$

Să presupunem că primul jucător a spus cifra 4 şi al doilea a completat cu ea ordinul cel mai înalt al descăzutului. Înainte de această mişcare diferenţa a fost nenegativă, după mişcare ea s-a mărit cu $4 \cdot 10^{n-1}$ şi mai mult nu s-a mai schimbat pentru că la toate mişcările următoare primul jucător a spus zero.

A rămas să se examineze cazul în care primul jucător a spus cifra 5 şi al doilea a completat cu ea ordinul cel mai înalt al scăzătorului. Vom împărţi cifrele spuse de primul jucător în serii, punînd într-o serie cifrele identice consecutive. Vom considera că al doilea jucător nu va aşeza una sub alta cifre identice căci în caz contrar ele ar putea fi eliminate şi să nu fie considerate în raţionamentele ulterioare. Vom demonstra acum că fiecare serie formată din 4 se termină astfel:

$$\begin{matrix} * \ldots * * \; a_m a_{m+1} \ldots a_n \\ * \ldots * \; 4 \; b_m b_{m+1} \ldots b_n \end{matrix}$$

Faptul că prima serie se termină astfel este evident. Presupunem că a s-a serie formată din 4 se termină astfel. Vom demonstra că şi a $(s+1)$-a serie se termină astfel. După a s - a serie de 4 urmează seria făcută din 5. Să considerăm cel mai din stînga 5 din această serie (amintim că cifrele şterse nu le considerăm). E clar că ea va intra în descăzut într-un ordin cu număr mai mic decît m, şi sub el va sta fie o steluţă fie, dacă va fi în ordinul $m-1$, un 4. Acest 5 este ultimul din seria sa. Într-adevăr, după ce el a fost pus diferenţa devine pozitivă şi primul începe să spună cifre de 4. Dacă considerăm acum cea mai din stînga cifră 4 din a $(s+1)$-a serie, atunci cu ajutorul aceloraşi raţionamente ne putem convinge că ea este situată în scăzător într-un ordin mai apropiat de primul decît ultimul 5 din seria precedentă, sub ea va fi o steluţă şi ea este ultima din seria sa.

De aceea, după ce s-a spus ultimul 4 apare următoarea situaţie

$$\begin{matrix} * * * \ldots * * \; a'_{k+1} \ldots a'_n \\ * * * \ldots * \; 4 \; b'_{k+1} \ldots b'_n \end{matrix}$$

După aceasta, primul jucător va spune o dată sau de mai multe ori cifra 5 şi, fiindcă după fiecare mişcare a sa scăzătorul a rămas mai mic decît descăzutul (prin înlocuirea steluţelor prin zero, făcută în gînd) atunci, înainte de a spune 9, a apărut următoarea situaţie:

$$\begin{matrix} * \; a_2 a_3 \ldots a_{k-1} a_k a'_{k+1} \ldots a'_n \\ 5 \; a'_2 a'_3 \ldots a'_{k-1} \, 4 \, b'_{k+1} \ldots b'_n \end{matrix}$$

unde pentru fiecare $i = 2, 3, \ldots, k-1$, sau $a'_i = a'_i$ sau $a'_i = 5$ şi a_i este o

steluță, iar diferența dintre numerele

$$a_2a_3 \ldots a_{k-1}a_k$$
$$a_2a_3 \ldots a_{k-1}4.$$

este negativă. Într-adevăr, dacă ea ar fi pozitivă, atunci înainte de anunțarea lui 9, primul jucător ar anunța 4, iar zero ea nu ar putea fi, întrucît a_k este sau steluță sau 5. Pe de altă parte este clar că dacă pentru $i < k$, a_i și a_i' nu sînt steluțe, atunci $a_i = a_i'$; într-adevăr, ele au coincis în momentul apariției ultimului 4. De aceea, pentru un anumit $j \leqslant k$, a_j este steluță iar sub el este un 4 sau un 5. Dar atunci este clar că diferența finală, nu e mai mică decît $4 \cdot 10^{n-1} + 3 \cdot 10^{n-j} > 4 \cdot 10^{n-1}$. Problema este rezolvată.

Iu. I. Ionin

M 154. *Pe o dreaptă sînt date 50 de segmente. Să se demonstreze că este adevărată cel puțin una dintre următoarele propoziții:*

a) există opt segmente care au un punct comun;

b) există opt segmente astfel încît oricare două dintre ele nu au puncte comune.

A.G. Harazișvili

Probabil că se pot da exemple de multe teoreme care să accepte ca un caz particular sau ca o consecință afirmația acestei probleme. Aici vom da numai una dintre ele.

Teoremă. Pe o dreaptă este dat un sistem arbitrar de segmente. Vom nota prin M numărul cel mai mic de puncte pe această dreaptă astfel încît fiecare dintre segmentele sistemului să conțină unul dintre aceste puncte; prin m, numărul cel mai mare de segmente care nu se intersectează două cîte două luate din sistemul nostru. Atunci $M = m$.

Inegalitatea $M \geqslant m$ este evidentă: este clar că dacă în sistem sînt m segmente care nu se intersectează două cîte două, atunci nu pot exista mai puțin de m puncte astfel încît cîte unul să fie conținut în fiecare dintre segmentele sistemului (chiar pe cele m segmente alese trebuie să se ia cel puțin m puncte). A rămas de demonstrat inegalitatea $M \leqslant m$.

Pentru aceasta este suficient să se demonstreze că din sistem totdeauna se poate alege un anumit număr k de segmente care nu se intersectează $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ și în fiecare dintre ele să se aleagă cîte un punct $A_1, A_2, \ldots, A_k$ astfel încît fiecare dintre segmentele sistemului să conțină cîte unul dintre aceste puncte.

Dacă reușim să găsim aceste k segmente, atunci evident, $M \leqslant k$ și $k \leqslant m$, de unde $M \leqslant m$. (De fapt atunci $M = k = m$ căci inegalitatea $M < m$ așa cum am văzut nu e posibilă.)

Să arătăm cum se pot alege aceste segmente și puncte.

Să ne închipuim că dreapta este situată în fața noastră orizontal. Vom lua acel segment α_1 al cărui capăt din stînga A_1 este situat mai la dreapta decît capetele din stînga ale tuturor celorlalte segmente. Alegem din sistem toate segmentele care conțin punctul A_1 (în particular pe α_1 — considerăm că segmentele despre care este vorba în problemă sînt segmente „închise" adică își conțin punctele de la extremități. De altfel afirmația, cum se verifică ușor, rămîne valabilă și pentru segmente-intervale „deschise" care nu-și conțin extremitățile).

Este clar că fiecare dintre segmentele rămase (dacă există) sînt situate în întregime la stînga punctului A_1 și nu se intersectează cu α_1. Segmentelor

rămase le aplicăm aceeași procedură și obținem segmentul α_2 și punctul A_2, apoi segmentul α_3 și punctul A_3 și așa mai departe pînă cînd la stînga capătului din stînga A_k al segmentului α_k nu mai este nici un segment din sistemul nostru. Segmentele $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ și punctele $A_1, A_2, ..., A_k$ satisfac toate cerințele. Teorema este demonstrată.

Să rezolvăm acum problema M 154. Vom demonstra că din $pq + 1$ segmente de pe o dreaptă, se pot alege totdeauna $p + 1$ segmente care au un punct comun sau $q + 1$ segmente care nu se intersectează două cîte două. (Pentru $p = q = 7$) este chiar problema M 154.)

Într-adevăr, dacă pentru sistemul dat format din $pq + 1$ segmente, mărimea $M = m$ despre care e vorba în teoremă este mai mare decît q, atunci se pot alege $m \geqslant q + 1$ segmente care nu se intersectează, iar dacă această mărime nu este mai mare decît q, atunci se poate alege o mulțime formată din $M \leqslant q$ puncte care are cîte un punct comun cu fiecare dintre cele $pq + 1$ segmente. Atunci, fiecare dintre cele M puncte trebuie să fie conținut cel puțin în $p + 1$ segmente: dacă fiecare punct ar fi conținut în cel mult p segmente, atunci în total numărul segmentelor nu ar fi mai mare decît $Mp \leqslant$ $\leqslant pq$.

N.B. Vasiliev

M 155. *Se dau cîteva pătrate, suma ariilor cărora este egală cu 1. Să se demonstreze că ele pot fi așezate fără suprapuneri într-un pătrat de latură 2.*

G.A. Galperin

Vom da două rezolvări ale acestei probleme bazate pe două moduri diferite de așezare a pătratelor și vom prezenta cîteva generalizări. Astfel, să presupunem că ni s-au dat cîteva pătrate de arie totală egală cu 1. Le vom numerota în ordinea de descreștere a laturilor, adică latura celui de al k-lea pătrat să nu fie mai mică decît latura celui de al $(k + 1)$-lea pătrat ($k =$ $= 1, 2, 3, ...$). Trebuie să demonstrăm că toate aceste pătrate pot fi aranjate într-un pătrat de latură $\sqrt{2}$.

P r i m a r e z o l v a r e. Vom duce în plan un segment orizontal de lungime $\sqrt{2}$ și prin extremitățile sale două semidrepte verticale. În „semibanda" formată (fig. 242) vom introduce pătrate.

Modul de aranjare este foarte simplu. Vom așeza pătratul cel mai mare în colțul din stînga jos (vom nota latura acestui pătrat prin x) apoi următorul pătrat, după mărime, îl vom așeza la dreapta primului și aliniat după latura orizontală inferioară și așa mai departe pînă cînd pătratul care vine la rînd nu mai încape în semibandă. Terminînd „primul etaj" punem „planșeul" prelungind latura superioară a pătratului din stînga pe toată lățimea benzii și pe segmentul obținut construim ca mai înainte „etajul al doilea", apoi al treilea și așa mai departe pînă cînd se termină toate pătratele.

Acum, pentru a demonstra cerința problemei, trebuie să demonstrăm că înălțimea h (vezi fig. 243) nu depășește numărul $\sqrt{2}$. (Înainte de a urmări demonstrația în continuare, încercați să faceți demonstrația singuri.)

Pentru aceasta, considerînd mărimile lui h și x date, să încercăm să evaluăm inferior suma ariilor pătratelor din bandă.

Să transferăm în gînd fiecare dintre pătratele care sînt lipite de „zidul din stînga" (în afară de cel mai de jos, pătratul de latură x) în capătul din dreapta al etajului precedent, așa cum se vede în figura 244.

Din modul de construire a etajelor, rezultă că fiecare dintre aceste pătrate va ieși dincolo de zidul din dreapta. Vom prelungi acum laturile orizontale

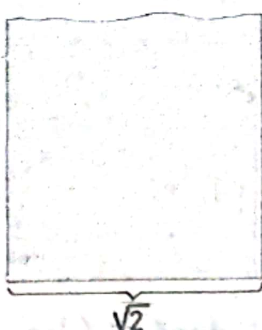


Fig. 242

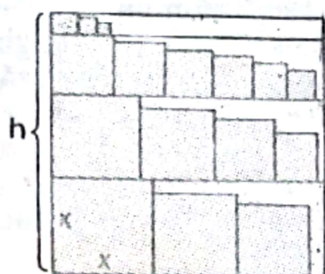


Fig. 243

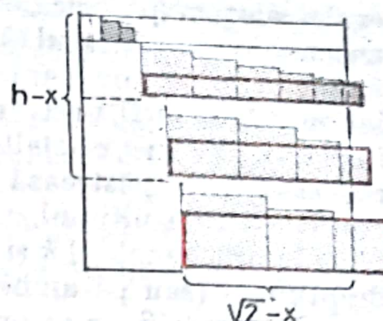


Fig. 244

ale fiecăruia dintre aceste pătrate transferate pînă la cel mai din stînga pătrat al respectivului etaj (se formează astfel nişte dreptunghiuri care pe figura 244 sînt marcate cu roşu). Este clar că suma ariilor tuturor pătratelor (în afară de cel de latură x) este mai mare sau egală cu suma ariilor dreptunghiurilor obţinute. Întrucît bazele orizontale ale fiecărui dreptunghi sînt cel puţin $\sqrt{2} - x$, iar suma înălţimilor lor este egală cu $h - x$, rezultă că suma ariilor tuturor pătratelor este cel puţin $(\sqrt{2} - x)(h - x)$.

Dar din ipoteza problemei aria lor este egală cu 1. Astfel

$$x^2 + (\sqrt{2} - x)(h - x) \leqslant 1$$

de unde

$$h \leqslant \frac{1 - x^2}{\sqrt{2} - x} + x = \sqrt{2}\left[3 - \left(y + \frac{1}{y}\right)\right]$$

unde $y = 2 - x\sqrt{2}$.

Prin urmare, fiindcă mărimea $y + \frac{1}{y}$ este mai mare sau egală cu 2, rezultă că $h \leqslant \sqrt{2}$.

R e z o l v a r e a a d o u a. Dacă în prima rezolvare modul de aranjare a pătratelor era uşor de descris şi greutatea principală consta în justificarea evaluării ariilor, într-a doua rezolvare situaţia este inversă, este greu de descris modul de aranjare (iar evaluarea va fi aproape evidentă).

Vom descrie aici modul de aranjare a pătratelor în mod formal. Descrierea „algoritmului" conform căruia vom aranja pătratele, este dată în aliniatul următor. După ce operaţia este efectuată de k ori, în pătratul $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ vor fi aşezate primele k pătrate (considerăm că ele sînt deja numerotate în ordine începînd cu cel mai mare) iar cealaltă parte a pătratului $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ va fi descompusă în $k + 1$ dreptunghiuri cărora le dăm numere de la 0 la k. Unele dreptunghiuri vor fi „închise" (acest lucru înseamnă că în ele nu vom mai introduce pătrate) iar celelalte „deschise" (în orice dreptunghi deschis se aşează al $(k + 1)$-lea pătrat). Iniţial, „dreptunghiul nr. 0" ocupă întregul pătrat $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$. Astfel, algoritmul de aşezare a pătratelor este:

Pasul al k-lea ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Alegem dintre toate dreptunghiurile neînchise pe acela care are numărul cel mai mare. (Fie acest număr m.) Aşezăm în unghiul său al k-lea pătrat. Prelungim latura acestui pătrat, paralelă cu latura mai mică a dreptunghiului m (dacă laturile dreptunghiului sînt

egale, alegem pe oricare dintre ele) astfel încît partea din dreptunghiul m neocupată de pătratul k să se descompună în două dreptunghiuri, îi dăm numărul k aceluia care formează un dreptunghi împreună cu pătratul k, iar numărul m îl păstrăm pentru partea rămasă a „fostului" dreptunghi m (fig. 245). Pentru celelalte pătrate și dreptunghiuri, în afară de dreptunghiurile m și k, se păstrează vechile numere. Dacă al k-lea pătrat pe care l-am așezat nu este ultimul, vom verifica dacă al $(k+1)$-lea pătrat nu se poate pune în dreptunghiul k și în dreptunghiul m și dacă nu, declarăm respectivul dreptunghi (sau pe ambele închise).

(În fig. 246, ca exemplu, este dată situația posibilă după al 4-lea pas.) Pentru $k = 5$, numărul m va fi egal cu 2; dreptunghiurile colorate sînt.

Mai trebuie demonstrat că nu se poate ivi cazul în care apar închise toate dreptunghiurile începînd chiar cu „numărul 0". Înainte de a demonstra acest lucru, vom observa că aria dreptunghiului închis cu numărul k este mai mică decît aria pătratului cu numărul k (aceasta este ideea principală a modului de așezare a pătratelor). Într-adevăr, este clar că pînă cînd latura mai mică a dreptunghiului k este egală cu latura pătratului k, el nu poate fi închis (în el se va așeza chiar al k-lea pătrat).

Acum să presupunem că la un anumit pas, al n-lea, dreptunghiul 0 care ar avea pînă la acest pas dimensiunile $c \times d (c \geqslant d)$ este închis. E clar că la al n-lea pas, $m = 0$ adică toate dreptunghiurile cu numere $m > 0$ sînt închise și aria lor este mai mică decît aria respectivelor pătrate.

Fie u și v laturile pătratelor cu numerele n și $n+1$. Dacă pătratul $v \times v$ nu este situat în dreptunghiul $d \times (c-u)$ (fig. 247), atunci $v \geqslant c - u$, de aceea

$$2(u^2 + v^2) \geqslant (u+v)^2 \geqslant c^2 \geqslant cd$$

adică, suma ariilor pătratelor al n-lea și al $(n+1)$-lea este mai mare sau egală decît jumătatea ariei dreptunghiului $c + d$. Se obține, că chiar primele $(n+1)$ pătrate reprezintă mai mult decît jumătatea ariei pătratului $\sqrt{2} \times \times \sqrt{2}$. Contradicție.

Propunem cîteva probleme care precizează și generalizează problema M155.

1. Două pătrate congruente de latură a nu pot fi așezate fără să se intersecteze într-un pătrat de latură mai mică decît $2a$.

2. Mai multe pătrate care au suma ariilor egală cu S, iar latura celui mai mare dintre ele este x, pot fi așezate într-un pătrat de latură $x + \sqrt{S - x^2}$.

3. Aceste pătrate pot fi așezate într-un dreptunghi $a \times b$, dacă $a \geqslant x$, $b \geqslant x$ și $ab \geqslant 2S$.

4. Dacă orice sistem de pătrate de arie totală 1 pot fi așezate într-un dreptunghi $a \times b$, atunci este adevărată cel puțin una dintre condițiile: 1) $a \geqslant \sqrt{3}$ și $b \geqslant 1$; 2) $a \geqslant \geqslant \sqrt{2}$ și $b \geqslant 2/\sqrt{3}$.

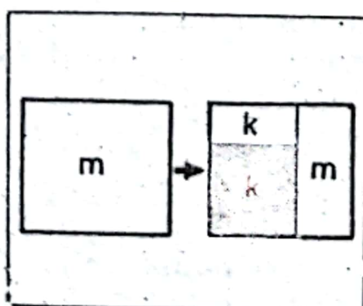


Fig. 245

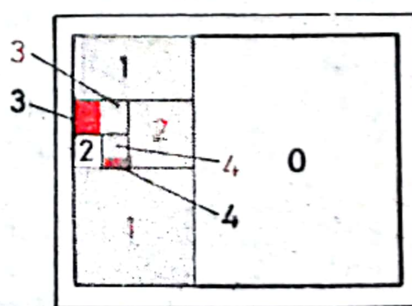


Fig. 246

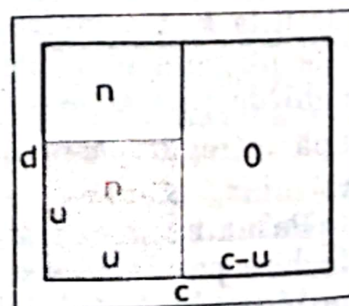


Fig. 247

D. Kleitman şi M. Kriger au demonstrat că în dreptunghiul $1 \times \sqrt{3}$ poate fi aşezat orice sistem de pătrate de arie totală 1. Este probabil că o afirmaţie analoagă este adevărată şi pentru dreptunghiul $\sqrt{2} \times 2/\sqrt{3}$.

5. Dreptunghiurile a căror arie totală este egală cu S şi au cea mai mare dintre laturile lor egală cu x pot fi aşezate într-un dreptunghi $a \times b$, dacă $a \geqslant x$ şi $ab \geqslant 2S + a^2/8$.

6. Cuburile de volum total V pot fi aşezate într-un cub de volum $4V$

N.B. Vasiliev, G.A. Galperin

M 156. *În dreptunghiul $ABCD$, punctul M este mijlocul laturei AD, şi N este mijlocul laturei BC. Pe prelungirea segmentului DC, dincolo de punctul D se ia punctul P. Notăm punctul de intersecţie a dreptelor PM şi AC prin Q. Să se demonstreze că $\sphericalangle QNM = \sphericalangle MNP$.*

Iu. V. Miheev

Fie O centrul dreptunghiului (vezi fig. 248) (punctul de intersecţie dintre MN şi AC), K punctul de intersecţie a lui QN cu perpendiculara ridicată pe segmentul MN în mijlocul său O. Atunci, aşa cum se vede uşor $QM/MP = QO/OC = QK/KN$ şi, prin urmare, $MK//PN$. Dar triunghiul MKN este isoscel căci în el, după construcţie, KO este şi înălţime şi mediană. De aceea $\sphericalangle QNM = \sphericalangle KMN = \sphericalangle MNP$.

Nu e greu să se rezolve problema şi cu ajutorul calculelor. De exemplu, se poate utiliza metoda coordonatelor. Dacă luăm sistemul de axe aşa cum se vede în figura 249, atunci coordonatele (x_0, y_0) ale punctului Q vor satisface următoarele două ecuaţii:

$(p - 2b)x - ay = -2ab$ (ecuaţia dreptei MP)

şi

$bx + ay = ab$ (ecuaţia dreptei CA).

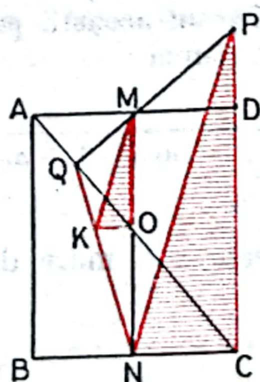


Fig. 248

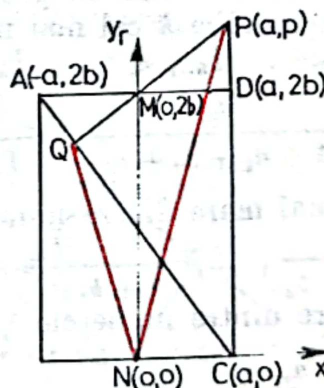


Fig. 249

Vom înmulţi a doua ecuaţie cu 2 şi o vom aduna cu prima. Obţinem (pentru $x = x_0$, $y = y_0$) $px_0 + ay_0 = 0$. Astfel, coeficientul unghiular al dreptei NQ este egal cu $y_0/x_0 = -p/a$, adică, în afară de semn, este egal cu coeficientul unghiular p/a al dreptei NP. De aceea $\sphericalangle QNM = \sphericalangle MNP$.

N.B. Vasiliev

M 157. *Suma a n numere pozitive $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ este egală cu 1. Fie S cel mai mare dintre numerele*

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \ldots\ldots, \frac{x}{1+x_1+x_2+\ldots x_n}.$$

Să se găsească cea mai mică valoare posibilă a lui S. Pentru ce valori ale lui $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se atinge?

Iu. I. Ionin

Să presupunem că numerele pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt astfel încît $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ și

$$\frac{a_1}{1+a_1} = \frac{a_2}{1+a_1+a_2} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\ldots a_n}$$

(mai jos vom arăta că o astfel de alegere a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ există). Vom arăta că pentru $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$ mărimea S ia cea mai mică valoare posibilă. Fie $b_1, b_2, \ldots, b_n$ un alt grup de numere pozitive a căror sumă este egală cu 1. Să observăm că dacă x_k se mărește și toate numerele precedente lui $(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1})$ nu se măresc, atunci mărimea

$$\frac{x_k}{1+x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k} = \frac{1}{\frac{1}{x_k}+\frac{x_1}{x_k}+\ldots+\frac{x_{k-1}}{x_k}+1} = \frac{1}{\frac{1+x_1+\ldots+x_{k-1}}{x_k}+1}$$

se mărește.

De aceea, dacă $b_1 > a_1$, atunci $\frac{b_1}{1+b_1} > \frac{a_1}{1+a_1}$; dacă $b_1 \leqslant a_1$, $b_2 > a_2$, atunci $\frac{b_2}{1+b_1+b_2} > \frac{a_2}{1+a_1+a_2} = \frac{a_1}{1+a_1}$; dacă $b_1 \leqslant a_1$, $b_2 \leqslant a_2$, $b_3 > a_3$, atunci $\frac{b_3}{1+b_1+b_2+b_3} > \frac{a_3}{1+a_1+a_2+a_3} = \frac{a_1}{1+a_1}$ ș.a.m.d.
Întrucît grupul de numere $b_1, b_2, \ldots, b_n$ este diferit de grupul $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și suma numerelor în amîndouă grupurile este aceeași, rezultă că $b_k > a_k$ pentru un anumit k. Fie k cel mai mic indice cu această proprietate, adică $b_1 \leqslant a_1$, $b_2 \leqslant a_2$, ..., $b_{k-1} \leqslant a_{k-1}$, $b_k > a_k$, atunci

$$\frac{b_k}{1+a_1+\ldots+a_k} > \frac{a_k}{1+a_1+\ldots+a_k} = \frac{a_1}{1+a_1}.$$

Astfel, cel mai mare dintre numerele
$\frac{b_1}{1+b_1}, \frac{b_2}{1+b_1+b_2}, \ldots, \frac{b_n}{1+b_1+\ldots+b_n}$ este mai mare decît $\frac{a_1}{1+a_1}$ (care este cel mai mare dintre numerele

$$\frac{a_1}{1+a_1}, \frac{a_2}{1+a_1+a_2}, \ldots, \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\ldots+a_n}\Bigg).$$

Rămîne să se rezolve în numere pozitive sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \\ \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_1+x_2} = \ldots = \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\ldots+x_n} \end{cases}$$

Ecuația $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_k}{1+x_1+x_2+\ldots+x_k}$ (pentru $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pozitivi) se

transformă în

$$x_k = (1 + x_1 + \ldots + x_{k-1})x_1,$$

aşa că sistemul dat devine echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} x_2 = (1 + x_1)x_1 \\ x_3 = (1 + x_1 + x_2)x_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = (1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1})x_1 \end{cases} \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1.$$

care la rîndul său este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} x_2 = (1 + x_1)x_1, \\ x_3 = (1 + x_1)^2 x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = (1 + x_1)^{n-1}x_1 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \end{cases}$$

adică numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ formează o progresie geometrică cu raţia $(1 + x_1)$ şi suma $(1 + x_1)^n - 1$.

1. Acum se găseşte uşor soluţia sistemului:

$$a_1 = \sqrt[n]{2} - 1, \; a_2 = \sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{2} - 1), \; a_3 = \sqrt[n]{2^2}(\sqrt[n]{2} - 1), \; \ldots, \; a_n = \sqrt[n]{2n-1}\,(\sqrt[n]{2} - 1).$$

Valoarea căutată a lui S este egală cu

$$\frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$

M 158. *Un tablou triunghiular se construieşte după regula următoare: în linia de sus se scrie un număr natural $a > 1$, iar apoi, sub fiecare număr k, la stînga se scrie k^2 iar la dreapta numărul $k + 1$. De exemplu, pentru $a = 2$, se obţine tabloul*

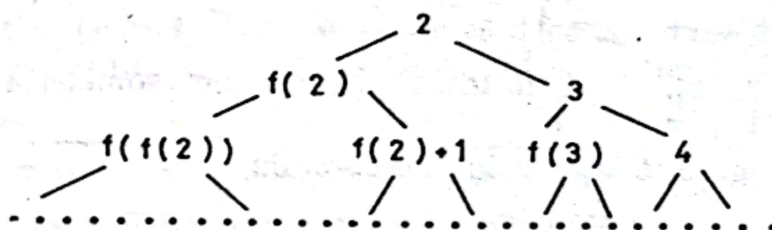
2
4 3
16 5 9 4
. . . .

Să se demonstreze că în fiecare linie, toate numerele sînt diferite între ele.

Să presupunem că în unele linii se întîlnesc şi numere la fel. Fie n indicele celei mai de sus linii cu această proprietate şi p şi q numerele egale din linia n. Fiindcă în linia precedentă nu sînt numere egale, rezultă că p şi q s-au obţinut din numerele liniei precedente prin acţiuni diferite: unul prin ridicare la pătrat, celălalt prin adăugarea lui 1. Fie $p = r^2$, $q = s + 1$, deci $s = r^2 - 1$. Numerele r şi s sînt situate în linia $n - 1$. Să examinăm calea prin care din numărul a s-a obţinut numărul s. Să presupunem că pe acest traseu s-au întîlnit ridicări la pătrat. Fiindcă $s < r^2$, atunci cel mai mare

număr care s-ar ridica la pătrat ar putea să fie $r - 1$. Dar $s - (r-1)^2 = 2r - 2$. Aceasta înseamnează că numărul s s-a putut obţine din numărul $(r-1)^2$ numai prin adăugarea de unităţi, iar pentru acest lucru sînt necesari $2r - 2$ paşi. Astfel, numărul s se obţine din numărul a prin cel puţin $2r-1$ paşi aşa că $n - 2 \geqslant 2r - 1$. Dar toate numerele care se obţin din numărul a după un astfel de număr de paşi, nu sînt mai puţine decît $a + 2r - 1 > r$ în timp ce numărul r aşezat în aceeaşi linie ca şi s, se obţine din a după acelaşi număr de paşi ca şi s. Astfel, la obţinerea numărului s din a nu a fost nici o ridicare la pătrat. Acelaşi lucru se poate spune şi despre numărul $q = s + 1$. Prin urmare q este mai mic decît numărul cel mai de la dreapta din rîndul său ceea ce contrazice egalitatea $q = p$.

Problema poate fi generalizată în felul următor. Fie f o funcţie definită pe mulţimea numerelor naturale şi luînd valori în mulţimea numerelor naturale. Presupunem că $f(n+1) - f(n) > n + 1$ pentru fiecare număr natural n. Vom construi acum un tablou triunghiular ca şi în problemă dar aplicînd de fiecare dată funcţia f în locul ridicării la pătrat.



Atunci în fiecare rînd al tabloului toate numerele sînt diferite.

Dăm o consecinţă interesantă a problemei M158.

Fie un şir infinit de numere pozitive $a_1, a_2, a_3, \ldots$, astfel încît, pentru fiecare număr natural n

$$a_n < a_{n+1} + a_{n^2}$$

deci $a_2 < a_3 + a_4$, $a_3 < a_4 + a_9$, $a_4 < a_5 + a_{16}$ ş.a.m.d. Atunci din aceste numere se pot alege cîteva, a căror sumă să fie mai mare decît 1000. Numărul 1000 poate fi înlocuit prin orice alt număr (Cum se spune: seria $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ este divergentă).

Condiţia de mai sus este îndeplinită în particular de şirul $a_n = \frac{1}{n}$ aşa că din această consecinţă se poate obţine încă o demonstraţie pentru cunoscuta teoremă asupra divergenţei seriei armonice $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots + 1/n + \ldots$: suma numerelor inverse numerelor naturale poate fi oricît de mare (în funcţie de numărul termenilor).

M 159. *Pot fi aranjate cifrele 0, 1, 2 în pătrăţelele unei foi de hîrtie de dimensiune 100×100 astfel încît în fiecare dreptunghi 3×4 (cu laturi formate din laturile pătrăţelelor) să fie trei de 0, patru de 1 şi cinci de 2?*

V.E. Lapiţki

Să presupunem că am reuşit să completăm o foaie de hîrtie în modul cerut. Să facem remarca, înainte de toate, că în cele două dreptunghiuri colorate din figura 250 se află acelaşi număr de 0, acelaşi număr de 1 şi acelaşi număr de 2 întrucît, ele sînt completate de aceeaşi figură (partea necolorată) pînă la un dreptunghi 3×4. Din acelaşi motiv, găsim acelaşi număr de 0, acelaşi număr de 1 şi acelaşi număr de 2 în dreptunghiurile colorate din figura 251. Să demonstrăm acum o serie de afirmaţii privitoare la aranjarea cifrelor 0, 1 şi 2.

1. Într-un dreptunghi 1×3 nu se găseşte mai mult de un zero.

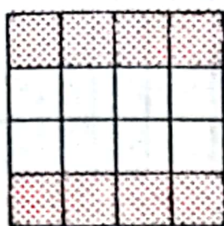


Fig. 250

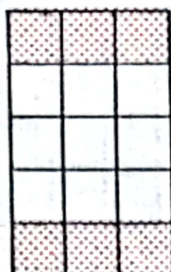


Fig. 251

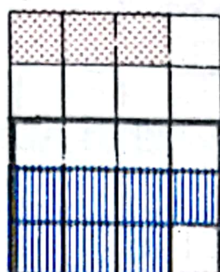


Fig. 252

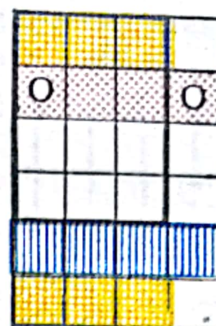


Fig. 253

Într-adevăr, dacă în dreptunghiul roşu 1 × 3 din figura 252 ar fi mai mult de un zero, atunci vor fi mai multe de un zero în fiecare dintre dreptunghiurile albastre 1 × 3 şi 1 × 4. În acelaşi timp, ambele dreptunghiuri albastre intră într-un dreptunghi 3 × 4 în care trebuie să fie de trei zero.

2. Într-un dreptunghi 1 × 4 nu se găseşte mai mult de un zero.

Dacă în dreptunghiul roşu 1 × 4 din figura 253 ar fi două zerouri, atunci ele ar fi aşezate aşa cum se vede în figură. Două zerouri ar trebui să fie şi în dreptunghiul albastru şi prin urmare cîte un zero în fiecare dintre dreptunghiurile galbene. Dar atunci în cele două dreptunghiuri 1 × 4 situate între cel roşu şi cel albastru, nu vor fi zerouri (altfel s-ar găsi un dreptunghi 3 × 4 care ar avea mai mult de trei zerouri). Prin urmare, în dreptunghiul 3 × 4 marcat ar fi numai două zerouri.

3. Într-un dreptunghi 1 × 4 se găseşte cel puţin un zero.

Dacă în dreptunghiul roşu 1 × 4 din figură nu ar fi zerouri, atunci nu vor fi nici în dreptunghiul albastru. Prin urmare în cele două dreptunghiuri 1 × 4 dintre ele trebuie să fie trei zerouri. În acelaşi timp în fiecare dintre acestea nu poate fi mai mult decît unul.

Rezultă că în fiecare dreptunghi 1 × 4 se găseşte exact un zero.

4. Într-un dreptunghi 1 × 4 nu se găsesc mai mulţi decît doi de 1.

Dacă în dreptunghiul roşu din figura 255 ar fi mai mulţi decît doi de 1, atunci ar fi mai mulţi decît doi de 1 şi în dreptunghiul albastru 1 × 4 şi n-ar fi mai puţini decît doi în dreptunghiul galben 1 × 3. Dar atunci s-ar găsi un dreptunghi 3 × 4 care ar conţine mai mulţi decît patru de 1.

5. Într-un dreptunghi 1 × 4 nu sînt mai mulţi decît doi de 2.

Dacă în dreptunghiul roşu 1 × 4 din figura 256 ar fi mai mulţi decît doi de 2 atunci tot aşa ar fi în dreptunghiul albastru şi cel puţin doi de 2 în galben. În dreptunghiul 1 × 4 situat deasupra dreptunghiului albastru se găseşte cel puţin un 2 fiindcă în el sînt cel mult doi de 1 şi un zero. Prin urmare, în dreptunghiul 3 × 4 marcat sînt mai mulţi de cinci de 2.

6. Într-un dreptunghi 1 × 3 nu se găsesc mai mulţi decît unu de 1.

Dacă în dreptunghiul roşu 1 × 3 din figura 256 sînt doi de 1, atunci cîte doi de 1 sînt şi în dreptunghiurile albastre 1 × 4 şi 1 × 3 fiindcă în dreptunghiul galben se găseşte un 1 cel puţin (în el nu sînt mai mulţi decît doi de 2 şi un zero), rezultă că în dreptunghiul marcat 3 × 4 sînt mai mulţi decît patru de 1.

7. Într-un dreptunghi 1 × 3 se găseşte cel puţin un 1. Dacă în dreptunghiul roşu 1 × 3 din figura 257 nu ar fi nici un 1, atunci, întrucît în fiecare dintre dreptunghiurile albastre nu se găseşte decît cel mult cîte un 1, în dreptunghiul 3 × 4 ar fi numai trei de 1.

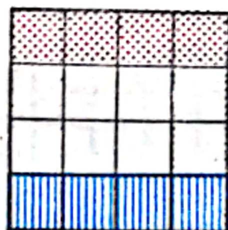


Fig. 254

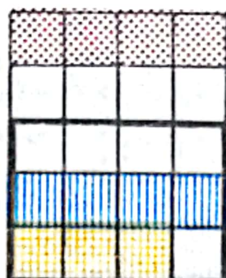


Fig. 255

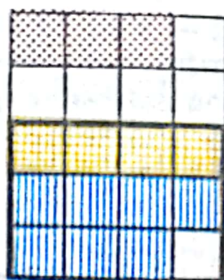


Fig. 256

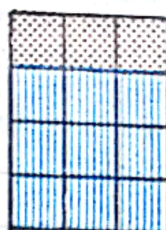


Fig. 257

Astfel în fiecare dreptunghi 1×3 se găseşte exact un singur 1.

Să luăm un zero. În rînd cu el se găseşte un 1, căci altfel s-ar găsi un dreptunghi 1×3 fără să aibă 1. Fiindcă într-un dreptunghi 1×4 trebuie să fie un zero, iar într-un dreptunghi 1×3 un 1, urmează că celelalte două pătrăţele trebuie să conţină 2: | 0 | 1 | 2 | 2 |. În următorul pătrăţel după cei doi de 2, trebuie să fie şi zero şi 1 căci altfel s-ar găsi un dreptunghi 1×4 fără zerouri respectiv un dreptunghi 1×3 fără 1.

În sfîrşit am obţinut contradicţia necesară.

Toate raţionamentele pe care le-am făcut sînt justificate, dacă dreptunghiul roşu cu care am început de fiecare dată nu e situat prea aproape de frontiera foii de hîrtie. Dimensiunile foii 100×100 sînt suficiente ca să realizăm acest lucru. Încercaţi să stabiliţi pentru ce dimensiune minimă a foii este adevărată afirmaţia problemei.

Iu. I. Ionin

M 160. *După ce s-a terminat un turneu de hochei (într-un tur), s-a văzut că orice grupă de echipe am lua, se poate găsi o echipă (poate să fie din această grupă) care a obţinut în jocurile cu echipele din această grupă un număr impar de puncte. Să se demonstreze că la turneu a luat parte un număr par de echipe. (Pierderea = 0 puncte, meci nul = 1 punct, victoria = 2 puncte).*

G.A. Kasparov

Fie numărul echipelor N. Vom pune rezultatele turneului sub forma unui tablou $N \times N$. La intersecţia liniei i cu coloana j, vom scrie numărul de puncte obţinute de echipa i în jocul cu echipa j; vom nota acest număr prin a_{ij}. Vom considera că echipa în jocul cu sine însăşi a obţinut 0 puncte, deci pe diagonală vor fi 0 ($a_{ii} = 0$).

Să observăm acum că dacă $a_{ij} = 0$ atunci echipa i a pierdut la echipa j, şi atunci $a_{ji} = 2$ fiindcă echipa j a cîştigat la echipa i. La fel, dacă $a_{ij} = 1$, atunci şi $a_{ji} = 1$. Deci în tabloul turneului este îndeplinită condiţia $a_{ij} + a_{ji} = 2$.

Fiecărei echipe îi corespunde în tabloul turneului o linie şi o coloană. Numărul punctelor obţinute de echipa i în jocurile cu grupa de echipe cu numerele $j_1, \ldots, j_k$ este egal cu suma numerelor $a_{ij_1}, \ldots, a_{ij_k}$ situate la intersecţia liniei i cu coloanele $j_1, \ldots, j_k$.

Acum putem să uităm de turneul de hochei şi să reformulăm problema în limbajul tablourilor.

Fie un tablou pătratic $N \times N$ format din numere întregi a_{ij} care satisfac următoarele două condiţii:

1) toate numerele a_{ii} de pe diagonala sa sînt pare şi suma oricăror două numere simetrice faţă de această diagonală este tot pară;

2) pentru fiecare grupă de coloane, se găseşte o linie astfel încît suma numerelor de la intersecţia acestei linii cu coloanele acestei grupe este impară.

Trebuie să se demonstreze că condiţiile 1) şi 2) se pot realiza atunci şi numai atunci cînd N este par.

Desigur că rezolvînd această problemă nouă, rezolvăm şi problema M 160.

Vom demonstra prin reducere la absurd. Să admitem că există un tablou $N \times N$ cu N impar care satisface condiţiile 1) şi 2). Vom arăta că atunci se poate construi un tablou $(N-2) \times (N-2)$ care să satisfacă şi el condiţiile 1) şi 2). Aplicînd această construcţie de $\frac{N-1}{2}$ ori, vom obţine un tablou format dintr-un singur număr şi care satisface condiţiile 1) şi 2). Acest lucru însă nu se poate întîmpla, pentru că un tablou 1×1 nu poate satisface ambele condiţii 1) şi 2) concomitent. Înseamnează că presupunerea făcută se dovedeşte falsă şi deci afirmaţia problemei este demonstrată.

Pentru ca să obţinem dintr-un tablou $N \times N$ un tablou $(N-2) \times$ $\times (N-2)$ păstrînd condiţiile 1) şi 2), vom introduce următoarele transformări ale tablourilor:

Transformarea 1. Schimbăm locul liniei i cu linia j şi a coloanei i cu coloana j.

Transformarea 2. Coloana i o înlocuim cu suma dintre coloana i şi coloana j şi apoi înlocuim linia i cu suma dintre linia i şi linia j.

Să explicăm transformarea 2; liniile i şi j pot fi considerate ca nişte grupe de N numere $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{iN})$ şi $(a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jN})$; se va numi suma celor două linii, următoarea sumă: $(a_{i1} + a_{j1}, ..., a_{iN} + a_{jN})$;
de exemplu

$$\begin{array}{r} (010102) \\ + \underline{(101110)} \\ (111212) \end{array}$$

În mod analog se defineşte suma dintre coloana i şi coloana j.

Înainte de toate să înlocuim toate numerele pare din tablou prin 0 iar cele impare prin 1. Vom obţine un tablou simetric, adică $a_{ij} = a_{ji}$ şi $a_{ii} = 0$, deci condiţia 1) este îndeplinită. Evident că şi condiţia 2) se păstrează.

Să considerăm ultima coloană, a N-a a acestui tablou. Conform proprietăţii 2), pentru ea se va găsi o linie astfel încît la intersecţia lor să fie 1; dacă numărul liniei este k, atunci $a_{kN} = 1$ şi prin urmare, $a_{Nk} = 1$ (aici am aplicat condiţia 2) la o coloană).

Efectuăm acum transformarea 1: schimbăm locurile liniilor k cu $N-1$ şi a coloanelor k cu $N-1$.

Ca rezultat, tabloul va avea următorul aspect:

$$A = \left| \begin{array}{lll} 0 \;\ldots\ldots & a_{1(N-1)} & a_{1N} \\ a_{21} \;\ldots\ldots & a_{2(N-1)} & a_{2N} \\ a_{31} \;\ldots\ldots & a_{3(N-1)} & a_{3N} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{(N-2)1} \cdots & a_{(N-2)(N-1)} & a_{(N-2)N} \\ a_{(N-1)1} \cdots & 0 & 1 \\ a_{N1} \;\ldots. & 1 & 0 \end{array} \right|$$

Aplicînd acum de cîteva ori transformarea 2, (folosind cele două coloane extreme şi cele două linii extreme) putem să aducem tabloul la forma următoare

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \dots\dots\dots\dots & \bar{a}_{1(N-2)} & 0 & 0 \\ \bar{a}_{i1} & \dots\dots\dots\dots & \bar{a}_{i(N-2)} & 0 & 0 \\ \dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{(N-2)1} & \dots\dots\dots\dots & \bar{a}_{(N-2)(N-2)} & 0 & 0 \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Amintim că numărul 2 l-am înlocuit prin 0. Eliminînd din acest tablou ultimile două linii şi ultimile două coloane, vom obţine un nou tablou $(N-2) \times (N-2)$. Rămîne să verificăm că el satisface condiţiile 1) şi 2).

Transformările 1 şi 2 transformă tablouri simetrice tot în tablouri simetrice şi nu schimbă paritatea numerelor de pe diagonală. Prin urmare, noul tablou va satisface condiţia 1).

Rămîne să verificăm că transformările 1 şi 2 păstrează condiţia 2). Pentru transformarea 1 acest lucru este cu totul evident. Rămîne să demonstrăm acest lucru pentru transformarea 2.

Dacă grupa de coloane considerată nu conţine coloana i şi se poate indica linia k care să satisfacă condiţia 2), unde k nu este egal cu i, atunci este evident că şi după transformarea liniei k o va satisface.

Dacă acest lucru nu se poate face, adică $k = i$ (cel puţin o linie înainte de transformare există) atunci pentru linia j, suma corespunzătoare este pară. De aici e clar că în tabloul transformat suma pentru linia i, ca înainte este impară.

În mod analog se judecă situaţia în care în grupa de coloane intră coloana i. Dacă în ea, nu intră coloana j, atunci trebuie să se ia o linie „care deserveşte" grupa completată cu coloana j şi dacă intră, atunci invers, trebuie eliminată. Am reuşit să trecem de la un tablou $N \times N$ la un tablou $(N-2) \times (N-2)$. Astfel problema este complet rezolvată.

Se vede că problema este un caz particular al unei teoreme generale din algebra liniară:

$$\begin{cases} \text{dacă } a_{ij} + a_{ji} = 0 \text{ şi sistemul de ecuaţii} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NN}x_n = 0 \end{cases}$$

are numai soluţia banală, atunci N este par. Această teoremă este adevărată atît pentru numere reale cît şi pentru orice elemente dintr-un corp comutativ. Ea se poate demonstra atît cu ajutorul determinanţilor, cît şi cu ajutorul unor „transformări elementare" ale tabloului format din a_{ij} aşa cum s-a procedat mai sus.

Încercaţi să demonstraţi această teoremă şi să deduceţi din ea rezolvarea problemei M 160.

M 161. *Un lac are forma unui poligon neconvex cu n laturi. Să se demonstreze că mulţimea punctelor lacului din care se vede tot malul său, este sau vidă sau reprezintă interiorul unui poligon convex cu m laturi, unde* $m \leqslant n$.

I.N. Bernştein

Fie l o latură a poligonului. Dreapta pe care este situată, împarte planul în două semiplane; notăm prin D_l semiplanul situat de aceeaşi parte a latu-

rei l ca şi lacul. Această dreaptă nu o includem în semiplanul D_l. Intersecţia D a tuturor celor n semiplane astfel obţinute este sau vidă sau reprezintă un poligon convex cu un număr de laturi $m \leqslant n$.

Vom demonstra că D coincide cu mulţimea punctelor din care se poate vedea tot malul lacului.

1. Fie O un punct din D. Vom demonstra că tot malul este vizibil din punctul O. Fie A_1, A_2 ..., A_n vîrfurile poligonului lac. Vom uni prin segmente punctele O, A_1, A_2 şi vom examina unde se poate găsi punctul A_3.

Cum se vede din figura 258, vîrful A_3 nu se poate găsi de aceeaşi parte faţă de dreapta OA_2 ca şi vîrful A_1 (s-a haşurat acea parte a segmentelor de care este lacul). Rezultă că punctele A_1 şi A_3 se găsesc de părţi diferite ale dreptei OA_2.

Să presupunem că punctul X se mişcă pe marginea lacului (de la A_1 la A_2, de la A_2 la A_3 ş.a.m.d.). Cînd X se mişcă de la A_1 la A_2, segmentul OX se roteşte într-un anumit sens (de exemplu, în sensul acelor ceasului). Fiindcă A_1 şi A_3 sînt situate de părţi diferite ale segmentului OA_2, rezultă că prin mişcarea lui X de la A_2 la A_3 segmentul se va roti în acelaşi sens. Raţionînd analog pentru punctele A_2, A_3, A_4, ..., vedem că prin mişcarea de la A_3 la A_4, de la A_4 la A_5 ş.a.m.d. segmentul OX se roteşte în acelaşi sens.

Cînd segmentul OX realizează o rotaţie completă, atunci punctul X coincide cu punctul A_1. Într-adevăr, să presupunem că punctul X nu ar coincide cu A_1; de exemplu, $OX < OA_1$. Atunci, în deplasarea sa ulterioară punctul X nu poate să mai ajungă în punctul A_1 fiindcă el nu poate ieşi din poligonul $DA_2A_3...A_kA_{k+1}$ (fig. 259) adică conturul poligonului nu s-ar închide.

Prin urmare, în interiorul triunghiului OA_1A_2 nu este nici un punct al conturului şi malul A_1A_2, şi deci, întregul mal al lacului se vede din punctul O.

2. Presupunem că din O se vede întreg malul lacului. Să considerăm latura $l = CB$ a poligonului $A_1...A_n$. Atunci este evident că triunghiul OCB este situat complet în interiorul lacului deci punctul O este situat în interiorul lui D_l. Deci punctul O în modul acesta este situat în interiorul tuturor semiplanelor D_l adică este situat în D.

Astfel am demonstrat că mulţimea punctelor din care se vede tot malul coincide cu mulţimea D şi deci este sau vidă sau formează un poligon convex cu m laturi, unde $m \leqslant n$.

I.N. Bernştein

M 162. *Şirul următor format din numere naturale*

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots \qquad \text{(A)}$$

are proprietatea că orice număr natural sau face parte din acest şir sau este suma a doi termeni, eventual egali, ai şirului.

Să se demonstreze că $a_n \leqslant n^2$ pentru toţi $n = 1, 2, \ldots$

Iu. G. Eroşkin (elev cl. a IX-a)

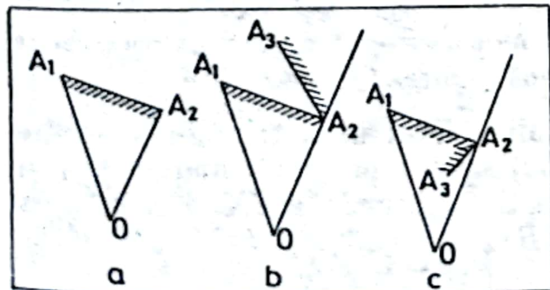


Fig. 258

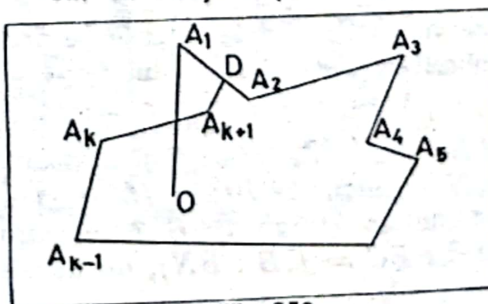


Fig. 259

Să considerăm primii $n - 1$ termeni ai şirului (A)

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1} \quad (1)$$

şi toate numerele naturale care pot fi scrise ca sumă a doi termeni din aceştia

$$a_1 + a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_3,\ \ldots,\ a_1 + a_{n-1},\ a_2 + a_2,\ a_2 + a_3,\ \ldots,\ a_2 + a_{n-1},\ \ldots$$
$$\ldots,\ a_{n-1} + a_{n-1}. \quad (2).$$

E uşor de văzut că sînt în total $\frac{n(n-1)}{2}$ sume. Chiar dacă toate numerele din (1) şi (2) sînt diferite, în total nu sînt mai multe de

$$(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n - 2}{2} < \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Astfel, se va găsi un număr natural între 1 şi n^2 care nu este cuprins în (1) şi (2). De aceea, dacă şirul satisface condiţia problemei (fiecare număr natural poate fi scris ca sumă a cel mult două numere din şirul (A)), atunci $a_n \leqslant n^2$.

Din raţionamentul nostru, se poate obţine şi o evaluare mai precisă

$$a_n \leqslant \frac{n^2 + n}{2}. \quad (3)$$

Este interesant să se studieze dacă nu se poate găsi o evaluare şi mai bună. Şirurile care satisfac condiţia problemei construite efectiv sînt foarte departe (pentru n mare) de limita dată de inegalitatea (3). Vom da două exemple:

1) Să fixăm un anumit număr natural k şi să considerăm şirul $1, 2, 3, \ldots, k - 1, 2k - 1, 3k - 1, 4k - 1, \ldots$ ($a_n = nk - (k-1)^2$ pentru $n = k, k + 1, k + 2, \ldots$). Acest şir, evident, satisface condiţia problemei. Cum se vede uşor, pentru $n = 2k$

$$a_n = a_{2k} = 2k^2 - (k-1)^2 = k^2 + 2k - 1 = \frac{n^2 + 4n - 4}{4}. \quad (4)$$

Evaluarea (4) este aproximativ de două ori mai restrictivă decît (3). Pentru n mare, diferenţa dintre a_n şi $(n^2 + n)/2$ se măreşte mult.

2) Să considerăm şirul tuturor numerelor naturale care pot fi scrise ca sumă dintre pătratele a două numere întregi: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20... Întrucît se ştie că orice număr natural poate fi scris ca suma a patru pătrate rezultă că acest şir satisface condiţia problemei (Cum se poate demonstra, şirul creşte mai repede decît orice funcţie liniară de n: $\lim a_n/n \to \infty$ dar mai încet decît n^2 : $\lim a_n/n^2 = 0$. Rezultă că a_n creşte aproximativ ca $n\sqrt{\ln n}$).

M 163. *Să se demonstreze că dacă diagonalele unui patrulater convex sînt perpendiculare între ele, atunci proiecţiile punctului lor de intersecţie pe cele patru laturi (sau pe prelungirile lor) sînt conciclice.*

I.A. Kuşnir

(Se vede că completarea „sau pe prelungirile lor" nu e necesară, întrucît, perpendiculara coborîtă din vîrful unghiului drept nu poate să cadă în afara ipotenuzei.)

Observăm că dacă din piciorul înălţimii BH al unui triunghi oarecare ABC cu unghiurile A şi C ascuţite (fig. 260) se duc perpendicularele HK şi HN pe laturile BC şi BA respectiv, atunci triunghiurile KBN şi ABC sînt asemenea (unghiul B este comun şi $AB \cdot BN = BH^2 = BC \cdot KB$, adică $AB : BC = KB : BN$), de aceea:

$$\angle BKN = \angle BAC \text{ (şi } \angle BNK = \angle BCA).$$

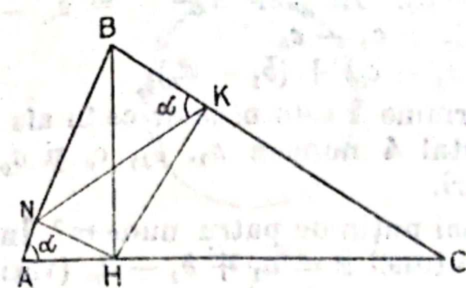


Fig. 260

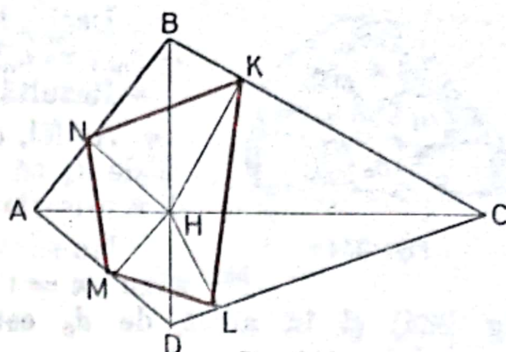


Fig. 261

Folosind acest lucru, se verifică ușor că unghiurile notate în figura 261 cu aceleași litere α, β, γ și δ sînt egale două cîte două, deci suma unghiurilor opuse K și M ale patrulaterului $KLMN$ este egală cu

$$(\pi - \alpha - \beta) + (\pi - \gamma - \delta) = (\pi - \beta - \delta) + (\pi - \alpha - \gamma) = \pi$$

deci este inscriptibil.

Este adevărată și reciproca: dacă într-un patrulater oarecare $ABCD$ picioarele perpendicularelor coborîte din punctul de intersecție a diagonalelor pe laturi sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil, atunci diagonalele lui $ABCD$ sînt perpendiculare. Demonstrația este analoagă ca cea de mai sus

I.B. Vasiliev

M 164. *În pătrățelele albe ale unei table de șah nemărginite care umple semiplanul superior (vezi fig. 262) se scriu niște numere astfel încît pentru fiecare pătrățel negru suma numerelor din cele două căsuțe vecine, din stînga și din dreapta, este egală cu suma numerelor din cele două căsuțe vecine, de sus și de jos. Se știe numărul situat într-o căsuță de pe linia n (marcat cu o cruciuliță în fig. 262) și trebuie să se afle numărul situat deasupra lui pe rîndul al (n + + 2)-lea. Cîte numere situate în primele două rînduri (marcate cu puncte) mai trebuie cunoscute pentru aceasta?*

M.L. Gherver

Vom introduce următoarele notații (vezi fig. 263): x numărul necunoscut din rîndul al $(n + 2)$-lea, d_n numărul dat din rîndul al n-lea. Numerele a și b nu ne sînt date dar se știe că $x + d_n = a + b$, de unde $x = d_n + (a - d_n) + (b - d_n)$. Fiindcă $b + d_{n-1} = b_n + d_n$, rezultă că $b - d_n = b_n - d_{n-1}$. Analog,

$$b_n - d_{n-1} = b_{n-1} - d_{n-2} = b_{n-2} - d_{n-3} = \dots = b_1 - d_0.$$

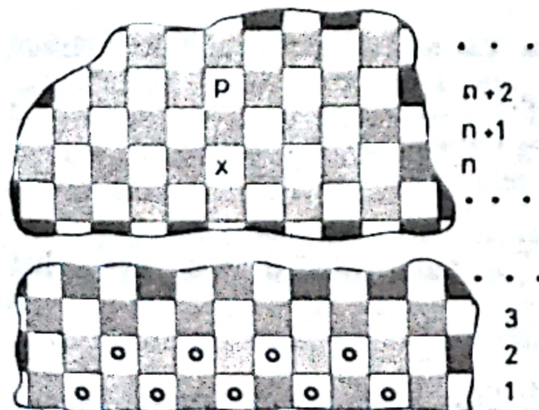


Fig. 262

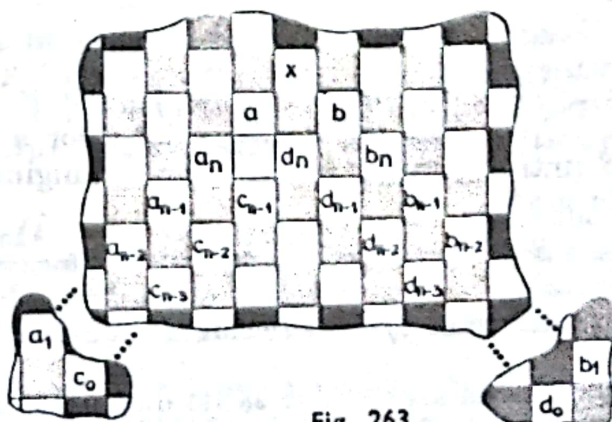


Fig. 263

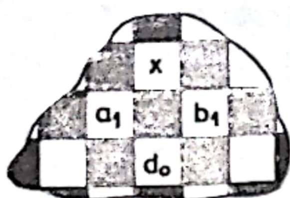


Fig. 264

Deci, $b - d_n = b_1 - d_0$. La fel $a - d_n = a_n - c_{n-1} = a_{n-1} - c_{n-2} = \ldots = a_1 - c_0$.

Rezultă, $x = d_n + (a_1 - c_0) + (b_1 - d_0)$.

Astfel, ca să se determine x este necesar ca în afară de d_n să se știe în total 4 numere a_1, b_1, c_0 și d_0 din primele două rînduri.

Nu se poate să fie mai puțin de patru numere? În cazul $n = 0$, se poate: atunci $x = a_1 + b_1 - d_0$ (vezi fig. 264) și în afară de d_0 este suficient să se mai știe două numere (a_1 și b_1).

Pentru $n \geqslant 1$, nu se poate să fie mai puțin decît patru numere și în afară de d_n trebuie cunoscute exact numerele a_1, b_1, c_0 și d_0; dacă măcar unul dintre aceste numere nu este cunoscut, atunci chiar dacă s-ar ști toate celelalte numere din primele două linii, nu se poate determina x. Să demonstrăm acest lucru.

Să presupunem de exemplu că numărul a_1 este necunoscut. Atunci nu ne împiedică nimic ca să-l luăm arbitrar. Acest lucru ar fi normal dacă numărul d_n nu ar fi dat, căci în acest caz numerele din primele două rînduri nu ar fi legate prin nici o relație — ele pot fi date arbitrar și cu ajutorul lor să determinăm toate celelalte numere în mod succesiv pe rînduri. În acest caz $d_n = P - N$ unde P este suma numerelor de pe rîndul 1 situate între a_1 și b_1 (fără a_1 și b_1) iar N este suma numerelor de pe rîndul O situate între c_0 și d_0 (fără c_0 și d_0); egalitatea $d_n = P - N$ se demonstrează ușor prin inducție după n; pentru aceasta trebuie să se folosească formula stabilită mai sus $x = d_n + (a_1 - c_0) + (b_1 - d_0)$.

Astfel, $d_n = P - N$ este singura relație care leagă pe d_n de numerele din primele două rînduri: a_1 nu intră în această relație. Înseamnă că știind pe d_n și toate numerele din primele două rînduri în afară de a_1 nu putem să-l determinăm pe a_1, deci el poate fi dat arbitrar. Dar, fixîndu-i pe b_1, c_0, d_0 și d_n și dîndu-i lui a_1 diferite valori vom obține diferite valori pentru x.

Astfel, condiția necesară și suficientă ca să poată fi determinat x, d_n fiind dat, este ca să fie dați și a_1, b_1, c_0 și d_0.

M.L. Gherver

M 165. *Pe o circumferință este situată o mulțime F de puncte formată dintr-o sută de arce. Se știe că la orice rotație R, mulțimea $R(F)$ are un punct comun cu F. (Cu alte cuvinte, pentru orice α de la 0° la 180°, în mulțimea F se pot indica două puncte distanțate între ele prin α.) Care este cea mai mică sumă posibilă a lungimilor celor 100 de arce care formează mulțimea F? Care va fi răspunsul pentru n arce?*

Iu.P. Lisov

Vom rezolva problema pentru n arce.

Vom nota suma lungimilor celor n arce care formează mulțimea F prin S (întrucît ne interesează numai lungimea relativă a arcelor, o vom măsura în grade).

S poate fi oricît de apropiată de $\frac{180°}{n}$. Este suficient să dăm un exemplu: așezăm $(n - 1)$ arce fiecare de lungime egală cu $\frac{a°}{n}$ astfel încît centrelor oricăror două arce vecine să fie distanțate cu $\frac{180°}{n}$ și după al $(n - 1)$-lea așezăm



Fig. 265





Fig. 266

al n-lea arc de lungime $\frac{180°}{n}$ astfel încît distanța dintre capetele lor cele mai apropiate să fie $\frac{180°}{n}$. Se verifică ușor că sistemul format din cele n arce așezate ca mai sus, satisface condițiile problemei. Pentru o alegere corespunzătoare a lui $a°$, suma arcelor poate fi luată oricît de aproape de $\frac{180°}{n}$.

Dacă un punct de pe circumferință se consideră ca arc de lungime nulă, atunci, înlocuind în exemplu fiecare dintre arce în afară de ultimul prin puncte, obținem o mulțime F cu suma lungimilor arcelor egală cu $\frac{180°}{n}$ (fig. 265).

Vom demonstra că suma lungimilor arcelor, S nu poate fi mai mică decît acest număr. Să ne închipuim că avem două exemplare din cercul nostru pe care sînt așezate aceleași n arce. Rotim unul dintre cercuri cu unghiul φ, $0° < \varphi < 360°$. Să considerăm mulțimea U_{ij} formată din acele valori ale lui φ, pentru care arcul i al circumferinței rotite se intersectează cu arcul j al circumferinței nerotite. Vom desena separat circumferința „de control“ (cu punctul inițial $\varphi = 0$ fixat pe ea (fig. 266)) și marcăm pe ea mulțimea U_{ij} pentru toți i, j de la 1 la n. Este evident că U_{ij} este un arc de lungime egală cu suma lungimilor arcelor i și j.

Mulțimile marcate U_{ij}, trebuie să umple întreaga circumferință „de control“ fiindcă pentru orice rotație, anumite două arce trebuie să se intersecteze, de aceea suma lungimilor tuturor U_{ij} nu este mai mică decît 360°. Pe de altă parte, această sumă este egală cu $2n \cdot S$, fiindcă fiecare arc intră în sumă de $2n$ ori.

De aici se obține că $S \geqslant \frac{360°}{2n} = \frac{180°}{n}$. Se observă ușor că inegalitatea trebuie să fie strictă (dacă nu considerăm punctele izolate ca arce), fiindcă orice două regiuni U_{jj} și U_{ii} au o parte comună care conține punctul origine.

Iu. P. Lisov

M 166. *a) Elevii unei clase au mers în două excursii. În prima excursie, numărul băieților a fost mai mic de 2/5 din numărul total al participanților la excursie iar în a doua excursie tot așa. Să se demonstreze că în clasă, băieții reprezintă mai puțin decît 4/7 din numărul total al elevilor, dacă se știe că fiecare elev a mers cel puțin într-o excursie.*

b) Presupunem că în excursia i, $(i = 1, 2, ..., n)$ băieții au reprezentat a α_i parte din numărul total al participanților la această excursie. Care este cea mai mare parte pe care o pot reprezenta băieții la întîlnirea tuturor turiștilor (a tuturor celor care au participat cel puțin la una dintre cele n excursii)?

a) La prima excursie, așa cum rezultă din ipoteza problemei, numărul băieților a fost mai mic decît 2/3 din numărul total al fetelor care au participat

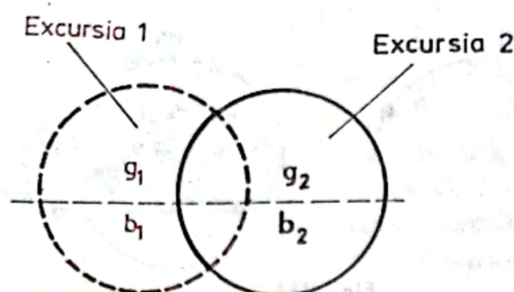


Fig. 267

la această excursie. Cu atît mai mult acest număr este mai mic decît 2/3 din numărul total al fetelor din clasă. La fel, numărul băieților participanți la cea de a doua excursie, este mai mic decît 2/3 din numărul total al fetelor din clasă. Întrucît fiecare băiat a fost cel puțin într-o excursie, (ca și fiecare elev, de altfel) rezultă că numărul total al băieților din clasă este mai mic decît 4/3 din numărul fetelor. Prin urmare, băieții din această clasă nu sînt mai mulți decît 4/7 din numărul total al elevilor.

Cu ajutorul notațiilor evidente din figura 267 (b și g sînt inițialele cuvintelor englezești *boy* și *girl*) rezolvarea noastră poate fi scrisă astfel.

După ipoteză, $5b_1 < 2(b_1 + g_1)$, de unde $3b_1 < 2g_1 < 2g$. La fel se demonstrează că $3b_2 < 2g_2 < 2g$. Întrucît $b \leqslant b_1 + b_2$, vom obține

$$3b \leqslant 3b_1 + 3b_2 < 4g$$

de unde $7b < 4(b + g)$.

b) Această problemă se rezolvă în mod analog. Fie b_i și g_i numărul băieților respectiv al fetelor participanți la excursia i, b și g numărul băieților respectiv al fetelor la întîlnirea tuturor participanților la excursii. Atunci, după ipoteză, $b_i = \alpha_i(b_i + g_i)$, de unde $(1 - \alpha_i)b_i = \alpha_i g_i \leqslant \alpha_i g$, de aceea, dacă toți $\alpha_i < 1$, atunci

$$b \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}\, g\right) = g \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}$$

de unde

$$b\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}\right) \leqslant (b + g) \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}.$$

Astfel, am demonstrat că dacă $\alpha_i < 1$, pentru toți i, rezultă că băieții vor reprezenta cel mult $\frac{c}{1 + c}$ din numărul total al participanților la excursii, unde

$$c = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1 + \alpha_i}$$

Mai trebuie să ne convingem că această margine poate fi efectiv atinsă. Pentru aceasta trebuie ca inegalitățile scrise să se transforme în egalități. Se înțelege ușor că acest lucru se realizează dacă fetele vor fi aceleași în toate excursiile iar băieții diferiți, adică fiecare dintre băieți a participat numai la o excursie. Să arătăm că acest lucru se poate face pentru orice α_i. Fie $\frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i} = \frac{m_i}{N}$ (numerele α_i și deci și $\alpha_i/1 - \alpha_i$ sînt raționale; putem să scriem pe $\alpha_i/1 - \alpha_i$ sub formă de fracții cu același numitor). Dacă în excursia i au fost N fete (aceleași) și m_i băieți (diferiți), atunci la întîlnire vor participa $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ băieți și N fete, raportul M/N este egal cu c și raportul $M/(M + N)$ este egal cu $c/(1 + c)$.

Să ne întoarcem pentru exemplificare la problema a).

Dacă numărul de excursii este $n = 2$ şi $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2}{5}$, atunci evaluarea exactă a numărului de băieţi este dată de $\frac{c}{1+c}$ unde

$$c = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} + \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \text{ adică numărul } \frac{c}{1+c} = \frac{4}{7}.$$

Aici, $\frac{\alpha_i}{1+\alpha_i} = \frac{2}{3}$ $(i = 1, 2)$ dacă în fiecare excursie au fost 3 fete (aceleaşi) şi cîte 2 băieţi (în prima excursie unii, în a doua alţii), adică în total 7 participanţi dintre care 4 băieţi (dacă consideraţi că ar fi prea puţini 7 elevi într-o clasă, atunci se pot înmulţi toate numerele de mai sus: 3, 2, 7 şi 4 să zicem prin 4 sau prin 5). Astfel numărul 4/7 din ipoteza problemei nu poate fi înlocuit cu unul mai mic.

Intorcîndu-ne din nou la problema b), observăm că dacă $\alpha_j = 1$ pentru un anumit j (cel puţin pentru unul) nu putem să dăm nici o evaluare superioară a numărului de băieţi din totalul participanţilor la întîlnire (cu excepţia numărului total de elevi care este o margine superioară pentru numărul băieţilor), dacă nu ştim numărul participanţilor la fiecare excursie. Într-adevăr, dacă numărul participanţilor la excursie j se ia foarte mare şi numai băieţi, atunci fracţia care reprezintă raportul dintre numărul total al băieţilor şi numărul total al participanţilor la excursii este foarte apropiată de 1.

M 167. *Să se demonstreze că în orice progresie aritmetică:*

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+nd,\ \ldots$$

formată din numere naturale, se găseşte un număr nesfîrşit de termeni astfel încît în descompunerea lor în factori primi să intre unele şi aceleaşi numere prime.

G. Polya

(Mulţi rezolvitori nu au înţeles condiţiile problemei. Să o analizăm mai amănunţit.) Aşa cum se ştie, orice număr natural N poate fi descompus într-un mod unic în factori primi

$$N = p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

În problemă se cere să se arate că din progresia aritmetică dată se poate găsi o mulţime infinită de termeni astfel încît factorii primi din descompunerile acestora $p_1, p_2, \ldots, p_r$ să fie aceeaşi dar exponenţii, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ pot să fie diferiţi.

Înainte de toate să observăm că dacă primul termen a şi raţia d au un factor comun $q > 1$, atunci vom considera toţi termenii simplificaţi prin q. Este evident că este deajuns să rezolvăm problema pentru noua progresie căci atunci prin înmulţirea cu q a termenilor găsiţi ei vor avea tot aceeaşi factori primi. Deci putem considera că a şi d sînt prime între ele. Este adevărată următoarea lemă:

Dacă c.m.M.d.c. al lui a şi d este 1, atunci există un astfel de k, încît $a^k - a$ se divide prin d.

D e m o n s t r a ţ i a l e m e i. Să considerăm şirul de numere $a, a^2, a^3, \ldots$ În el se vor găsi două numere care dau acelaşi rest la împărţirea prin d. Fie

acestea a^s şi a^t $(s < t)$. Atunci, diferenţa lor, $a^t - a^s = a^s\ (a^{t-s} - 1)$ se divide prin d. Întrucît a şi d sînt prime între ele, rezultă că $a^{t-s} - 1$ se divide prin d, de aceea $a^{t-s+1} - a$ se divide prin d, adică putem să-l luăm pe $k = t - s + 1$ (Raţionamente analoage se fac şi în demonstraţia „micii teoreme a lui Fermat" sau în cazul teoremei lui Euler: $a^{\varphi(d)} - 1$ se divide prin d, dacă a şi d sînt prime între ele iar $\varphi(d)$ este funcţia lui Euler care dă numărul numerelor mai mici decît d şi prime cu el.

Atunci pentru orice $m>0$ întreg, $a^{km} - a = (a^k - a)(a^{k(m-1)} + a^{k(m-2)} + \dots + 1)$ se divide prin d, adică $a^{km} - a = nd$, unde n este un număr natural. Deci, pentru fiecare număr natural m, numărul $a^{km} = a + nd$ face parte din progresia dată. Astfel că există un număr nesfîrşit de mare de termeni ai progresiei date care sînt puteri ale primului său termen. Este evident că toţi aceşti termeni admit aceeaşi factori primi în descompunerea lor.

M 168. *Într-un trunchi de piramidă regulată (fig. 268), punctul K este mijlocul unei laturi oarecare AB a bazei superioare iar punctul L este mijlocul unei laturi oarecare CD a bazei inferioare. Să se demonstreze că proiecţiile segmentelor AB şi CD pe dreapta KL sînt congruente.*

G. Noten

Dacă a şi b sînt două segmente (în plan sau în spaţiu) atunci proiecţia segmentului a pe dreapta pe care este situat b o vom nota prin $\mathrm{pr}_b a$. Atunci (fig. 269)

$$\mathrm{pr}_b a = a \cos \alpha \tag{1}$$

unde α este unghiul dintre dreptele pe care sînt situate segmentele a şi b (în această formulă şi în următoarele, a, $\mathrm{pr}_b a$, b ş.a. reprezintă lungimile respectivelor segmente). Cel mai mic unghi dintre drepte nu e mai mare decît $\pi/2$ deci $\cos \alpha \geqslant 0$. Din (1) rezultă egalitatea

$$a \cdot \mathrm{pr}_b a = b \cdot \mathrm{pr}_b a \tag{2}$$

Vom nota prin P respectiv Q centrele bazelor superioară, respectiv inferioară. Vom demonstra următoarea afirmaţie mai generală decît cerinţa problemei.

Fie planele în care se găsesc două triunghiuri isoscele asemenea ABP şi CDQ cu vîrfurile P şi Q, perpendiculare pe segmentul PQ (şi deci paralele între ele). Vom nota segmentul care uneşte mijloacele K şi L ale bazelor AB şi CD prin s. Atunci (fig. 270)

$$\mathrm{pr}_s k = \mathrm{pr}_s l. \tag{3}$$

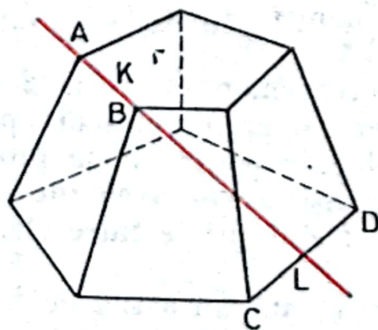


Fig. 268

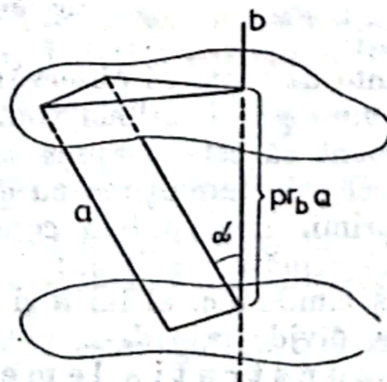


Fig. 269

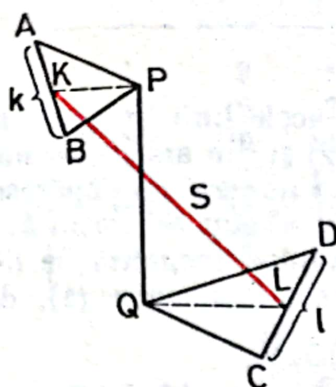


Fig. 270

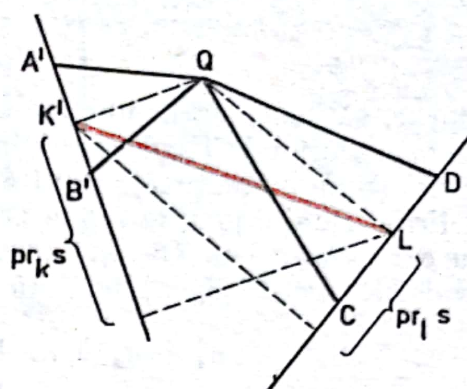


Fig. 271

Folosind pe (2), în locul lui (3) putem demonstra următoarea egalitate:

$$k\cdot \mathrm{pr}_k s = l\, \mathrm{pr}_l s. \qquad (4)$$

Ne vom folosi acum de faptul, care rezultă din (1), că lungimea lui $\mathrm{pr}_b a$ nu se schimbă în cazul unor deplasări paralele ale segmentelor a și b. De aceea, putem să proiectăm segmentul $k = AB$ pe planul triunghiului CDQ și vom obține:

$$\mathrm{pr}_{A'B'}K'L = \mathrm{pr}_{A'B'},\ KL = \mathrm{pr}_{AB}KL = \mathrm{pr}_k s \qquad (5)$$

unde A', B', K' sînt proiecțiile punctelor A, B și K pe planul CDQ (fig. 271). Astfel, am redus problema la cazul în care ambele triunghiuri sînt situate în același plan (și au un vîrf comun).

Dacă segmentele AB și CD sînt paralele, atunci egalitatea (4) este evidentă, întrucît ambele proiecții sînt egale cu zero. Dacă aceste segmente sînt neparalele, atunci vom obține:

$$\frac{k}{l} = \frac{A'B'}{CD} = \frac{QK'}{QL} = \frac{\sin\sphericalangle OLK'}{\sin\sphericalangle OK'L} = \frac{|\cos\sphericalangle K'LC|}{|\cos\sphericalangle LK'B|} = \frac{\mathrm{pr}_l s}{\mathrm{pr}_k s}$$

de unde rezultă (4).

M 169. *Fie k și n numere naturale, $k < n$. Să se așeze numerele $1, 2, 3, \dots, n^2$ într-un tablou $n \times n$, astfel încît în fiecare linie numerele să fie aranjate în ordine crescătoare iar suma numerelor de pe coloana k să fie: a) minimă; b) maximă.*

N.B. Vasiliev

Rezolvăm la început punctul a). Dacă vom așeza numerele așa cum se arată în tabloul 1 a, la început completăm primele k coloane, linie cu linie cu numere de la 1 la kn, iar apoi cu restul numerelor completăm ultimile $n - k$ coloane (cum dorim, respectînd doar cerința de aranjare în ordine crescătoare pe fiecare linie), atunci suma numerelor de pe coloana k, va fi egală cu

$$k(1 + 2 + \dots + n) = \frac{kn(n+1)}{2} \qquad (1)$$

Vom demonstra că această valoare a sumei este minimă. La început vom demonstra că dacă $a_1, a_2, \dots, a_n$ sînt numerele din coloana k numerotate în ordine crescătoare

$$a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots < a_n, \qquad (2)$$

atunci

$$a_i \geqslant ki \qquad (3)$$

Într-adevăr, să considerăm numerele situate în acele linii în care sînt a_1, a_2, ..., a_i şi în primele k coloane. Din condiţia (2) şi din aranjarea numerelor pe linii în ordine crescătoare, rezultă că aceste ki numere nu depăşesc numerele a_i. Prin urmare, printre numerele 1, 2, 3, ... n^2 sînt cel puţin ki numere care nu depăşesc pe a_i. De aici rezultă (3). Adunînd inegalităţile (3), după toate valorile $i = 1, 2, ..., m$ vom obţine în dreapta suma (1), de aceea

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geqslant \frac{kn(n+1)}{2}.$$

Problema b) poate fi rezolvată în mod analog, începînd „cu cele mai mari numere" şi cu coloanele din dreapta. Dar ea poate fi redusă la problema a) deja rezolvată. Înlocuim în tablou, fiecare număr a prin $n^2 + 1 - a$ şi apoi în fiecare linie aranjăm numerele în ordine inversă. Este evident că aceasta este o transformare bijectivă a mulţimii tabelelor formate din numerele 1, 2, ..., n^2 care satisfac condiţiile problemei. Prin această transformare, fiecare număr din coloana k a tabelei noi A' este egal cu un număr de pe aceeaşi linie din coloana $n + 1 - k$ a tabelei vechi A; de aceea suma numerelor din coloana k a tabelei A' este egală cu $n(n^2 + 1) - S$, unde S este suma numerelor din coloana $n + 1 - k$ a lui A. Astfel, este suficient să se rezolve problema a) pentru coloana $n + 1 - k$ şi vom obţine soluţia problemei b) pentru coloana k: răspunsul poate fi scris astfel: suma maximă în coloana k este egală cu

$$n(n^2 + 1) - \frac{(n + 1 - k)n(n + 1)}{2} = \frac{n(n - 1)^2 + k(n + 1)}{2}$$

Un exemplu (obţinut prin transformarea $A \to A'$, $k \to n + 1 - k$ din tabela 1 a) este dat în tabela 1 b. În tabelele $2a$ şi $2b$ sînt date două exemple pentru $n = 6$ şi coloana cu numărul $k = 4$.

N.B. Vasiliev

Tabela 1 a

		k	
1	2 .... $k-1$	k	$nk+1$ ....
$k+1$	$k+2$ .... $2k-1$	$2k$	
$2k+1$	$2k+2$ .... $3k-1$	$3k$	
....	....	......	....
$(n-1)(k+1)$	.... $nk-1$	nk	.... n^2

Tabela 1 b

	k	
..$nk-n$	$n^2-(n-k)$	.... n^2
	$n^2-2(n+1-k)+1$	.... $n^2-(n+1-k)$
	$n^2-3(n+1-k)+1$	.... $n^2-2(n+1-k)$
......	....	....
1......	$nk-n+1$	.... $kn-k+1$

Tabela 2 a — 4

1	2	3	4	25	26
5	6	7	8	27	28
9	10	11	12	29	30
13	14	15	16	31	32
17	18	19	20	33	34
21	22	23	24	35	36

Suma: 84

Tabela 2 b — 4

16	17	18	34	35	36
13	14	15	31	32	33
10	11	12	28	29	30
7	8	9	25	26	27
4	5	6	22	23	24
1	2	3	19	20	21

Suma: 159

M 170. *a) Fie M și N punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile AB și AC, P punctul de intersecție a bisectoarei unghiului B cu dreapta MN. Să se demonstreze că unghiul BPC este drept.*

b) Să se demonstreze un lucru mai general: dacă punctul O situat în interiorul triunghiului ABC este astfel încît $\sphericalangle BOC - \sphericalangle BAO = 90°$, iar M și N sînt picioarele perpendicularelor coborîte din punctul O pe laturile AB și AC, P este punctul de intersecție a dreptelor BO și MN, atunci $\sphericalangle BPC = 90°$ (fig. 272).

Problema a) este într-adevăr un caz particular al problemei b): dacă O este centrul cercului înscris, atunci suma dintre unghiurile BOC, OCB și OBC este 180°, iar unghiul BAO împreună cu ultimele două de mai înainte dau jumătate din suma unghiurilor triunghiului, adică 90°.

De aceea, rezolvăm direct problema b). Să presupunem, ca să precizăm, că P se găsește pe prelungirea segmentului MN dincolo de punctul N, ca în figură. (Alte cazuri se rezolvă analog, le puteți analiza singuri.) Din ipoteză, $\sphericalangle OMA = \sphericalangle ONA = 90°$, de aceea patrulaterul $OMNA$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle ONM = \sphericalangle OAM = \sphericalangle BAO$.

Să arătăm acum că punctele O, N, P și C sînt conciclice. Într-adevăr, $\sphericalangle CNP = \sphericalangle MNA = 90° - \sphericalangle MNO = 90° - \sphericalangle BAC$, $\sphericalangle COP = 180° - \sphericalangle BOC$. Utilizînd condiția problemei: $\sphericalangle BOC - \sphericalangle BAO = 90°$, vom obține $\sphericalangle CNP = \sphericalangle COP$. În sfîrșit, din faptul că patrulaterul $CONP$ este inscriptibil, rezultă egalitatea care ne trebuie $\sphericalangle CPO = \sphericalangle CNO = 90°$.

I.F. Sarîghin

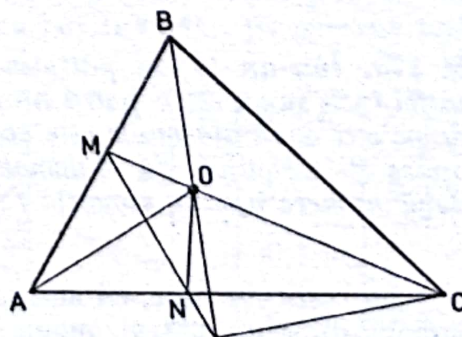


Fig. 272

M 171. *Într-un plan este desenat un hexagon regulat de latură 1. Numai cu ajutorul riglei, să se construiască un segment egal cu $\sqrt{7}$.*

A.V. Aliaev

Se poate demonstra fără dificultate că lungimea segmentelor roşii din figura 273 este egală cu $\sqrt{7}$.

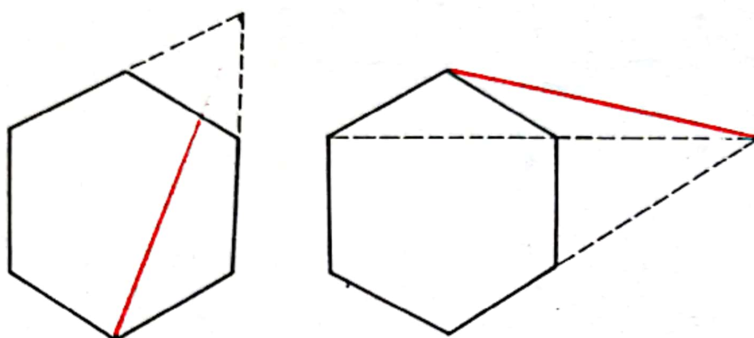


Fig. 273

M 172. *Să se demonstreze că pentru orice număr prim p, numărul*

$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\underbrace{33\ldots3}_{p}\ldots\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p}-123456789$$

se divide prin p.

M.L. Gherver

Introducem următoarele notaţii: $123456789 = A$, $\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\underbrace{33\ldots3}_{p}\ldots$

$$\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p} = B,\ 1\underbrace{0\ldots02}_{p}\underbrace{0\ldots03}_{p}\ldots\underbrace{0\ldots08}_{p}\underbrace{0\ldots09}_{p} =$$

$$= 10^{8p} + 2\cdot 10^{7p} + 3\cdot 10^{6p} + \ldots + 8\cdot 10^{p} + 9 = C,\quad \underbrace{11\ldots1}_{p} = E.$$

Evident că $B = E\cdot C$, $C - A = 3(10^{8p} - 10^{8}) + 2(10^{7p} - 10^{7}) + 3(10^{6p} - 10^{6}) + \ldots + 8(10^{p} - 10)$, $10^{p} - 10 = (9\cdot E + 1) - 10 = 9(E - 1)$.

Conform „micii teoreme" a lui Fermat, numărul $n^{p} - n$ se divide prin p pentru orice număr prim p şi orice număr natural n. În particular, $10^{p} - 10$, $10^{2p} - 10^{2}$, ..., $10^{8p} - 10^{8}$ se divid prin p şi $9(E - 1)$ se divide prin p.

Astfel, $B - A = EC - AE + AE - A = E(C - A) + A(E - 1)$ se divide prin p, ceea ce trebuia demonstrat.

M.L. Gherver

M 173. *Într-un tablou pătratic 4×4, sînt aşezate numerele 1, 2, 3, ... 16, astfel încît suma celor patru numere de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană şi de pe cele două diagonale este aceeaşi iar numerele 1 şi 16 sînt situate în colţuri opuse ale tabloului. Să se demonstreze că în acest „pătrat magic" suma oricăror două numere aşezate simetric faţă de centrul pătratului este aceeaşi.*

L.G. Limanov

Se constată uşor, că suma numerelor de pe fiecare linie, coloană şi diagonală dintr-un pătrat magic 4×4, este egală cu 34. Într-adevăr suma tuturor numerelor din pătrat este egală cu $\frac{17\cdot 16}{2} = 34\cdot 4$.

De aceea, trebuie să se demonstreze că în pătratele care satisfac condiţia din problemă (numerele 1 şi 16 să fie situate în colţuri opuse) suma numerelor simetrice faţă de centrul pătratului este egală cu 17. Pentru numerele 1 şi 16, aceasta se realizează după ipoteză. Vom considera că 1 este situat în colţul din stînga sus şi 16 în cel din dreapta jos, atunci celelalte două numere de pe această diagonală, să le notăm prin a şi a', vor satisface egalitatea $a + a' = 17$. Vom conveni ca numărul care îl completează pe x pînă la 17, să-l notăm prin x' : $x' = 17 - x$.

Vom folosi acum notaţiile din figura 274 (S_i reprezintă suma numerelor din respectivele căsuţe).

Sînt adevărate următoarele egalităţi:

$$S_1 + c + d + a + a' + S_2 + S_3 + c + d + a + a' + S_4 + 2(b + c + d + e) = 34 \cdot 6$$

(aceasta este suma numerelor din cele două coloane din mijloc, din cele două linii din mijloc şi de două ori de pe diagonale).

$$1 + S_1 + b + b + S_3 + 16 + 16 + S_2 + e + e + S_4 + 1 = 34 \cdot 4$$

(aceasta este suma numerelor din prima linie, din coloana a patra, din linia a patra şi din coloana întîi).

Din aceste egalităţi, obţinem că $4(c + d) = 34 \cdot 2$. Deci $c + d = 17$ şi deci şi $b + e = 17$, adică $d = c'$, $e = b'$.

Trecem acum la figura 275. Evident $y \neq x'$, întrucît $b \neq 1'$. Vom arăta că x' şi y' nu pot să fie situate în căsuţele colorate. Observăm că x' şi y' nu pot să fie situate în căsuţele colorate de pe aceeaşi coloană; dacă ar fi situate în cele din prima coloană, atunci adunînd numerele din prima linie şi din prima coloană, am obţine că

$$34 \cdot 2 = 34 + 2 + 17$$

şi dacă ar fi situate în cele din ultima coloană, atunci adunînd numerele din prima linie şi din prima coloană am obţine că

$$34 \cdot 2 = 34 + 2b + 17,$$

ambele aceste egalităţi nefiind adevărate. Să presupunem acum că x' este situat într-o căsuţă colorată din coloana întîi (cazul în care ar fi y', se tratează asemănător). Celălalt număr din pătrăţelele colorate de pe coloana întîi, îl vom nota prin z. Atunci, adunînd numerele de pe coloana întîi şi de pe linia întîi, vom obţine: $34 \cdot 2 = 2 + 17 + 17 + y + z$, de unde $y + z = 32$ ceea ce este imposibil. Astfel, nici x' nici y' nu pot fi situaţi pe coloana întîi

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="2">S₁</td><td>b</td></tr>
<tr><td rowspan="2">S₄</td><td>a</td><td>c</td><td rowspan="2">S₃</td></tr>
<tr><td>d</td><td>a'</td></tr>
<tr><td>e</td><td colspan="2">S₂</td><td></td></tr>
</table>

Fig. 274

1	x	y	b
	a	c	
	c'	a'	
b'	u	v	16

Fig. 275

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Fig. 276

şi împreună nu pot fi situaţi nici în coloana a patra. Rezultă că sau x' sau y' vor fi situaţi pe locul lui u sau v. Să presupunem că va fi x' (cazul în care ar fi y', se judecă analog). Dar $x' \neq u$, întrucît $a \neq c$, rezultă $x' = v$, atunci $y' = u$ şi deci numerele situate în căsuţele colorate de pe coloana a patra completează (pînă la 17) numerele situate în căsuţele simetrice faţă de centrul pătratului de pe coloana întîi (verificaţi).

În încheiere, în figura 276, este dat un exemplu de pătrat magic care satisface condiţiile problemei (din raţionamentele anterioare nu rezulta existenţa unui astfel de pătrat).

L.G. Limanov

M 174. *Pe laturile triunghiului ABC drept baze, se construiesc triunghiurile isoscele AB_1C, BA_1C, AC_1B (fig. 277). Să se demonstreze că perpendicularele duse din punctele A, B şi C, respectiv pe dreptele B_1C_1, C_1A_1 şi A_1B_1 sînt concurente.*

A.G. Ghein

Dăm mai jos cîteva leme din care va rezulta şi rezolvarea problemei dar care sînt utile şi în cazul altor probleme.

Lema 1. Fie A_1 şi A_2 două puncte date în plan şi k, k_1 şi k_2 numere reale. Atunci, locul geometric al punctelor M din plan astfel încît

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k$$

va fi:

a) un cerc, sau un punct sau mulţimea vidă, dacă $k_1 + k_2 \neq 0$;

b) o linie dreaptă perpendiculară pe segmentul A_1A_2, dacă $k_1 + k_2 = 0$ (dar $k_1 \neq 0$).

Demonstraţie a). Fie $k_1 > 0$ şi $k_2 > 0$. Vom lua pe segmentul A_1A_2 punctul D care împarte acest segment în raportul $k_2 : k_1$. Atunci $k_1(A_1D) = k_2(A_2D)$. Fie $\sphericalangle MDA_1 = \varphi$ (vezi fig. 278). Vom scrie teorema cosinusului pentru triunghiul MDA_1 şi pentru MDA_2:

$$(A_1M)^2 = (A_1D)^2 + (MD)^2 - 2MD \cdot DA_1 \cos\varphi, \quad (A_2M)^2 = (A_2D)^2 + (MD)^2 + 2MD \cdot DA_2 \cos\varphi.$$

Înmulţind prima egalitate cu k_1, a doua cu k_2 şi adunîndu-le, obţinem:

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k_1(A_1D)^2 + k_2(A_2D)^2 + (k_1 + k_2)(MD)^2$$

de unde

$$(MD)^2 = \frac{k - k_1(A_1D)^2 - k_2(A_2D)^2}{k_1 + k_2} = C.$$

Prin C am notat o constantă. Dacă $C > 0$, punctul M se găseşte pe un cerc de rază $\sqrt{C}$; dacă $C = 0$ punctul M coincide cu D; dacă $C < 0$, nu există puncte M care să satisfacă cerinţa problemei. Se verifică uşor şi afirmaţia reciprocă: fiecare punct M al mulţimii obţinute satisface relaţia $k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k$.

Am considerat cazul $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Cazul $k_1 < 0$, $k_2 < 0$ se reduce la cel precedent prin schimbarea semnelor lui k, k_1, k_2, iar în cazul $k_1 > 0$, $k_2 < 0$ (sau invers) se poate proceda ca mai sus dar punctul D va fi situat în afara segmentului A_1A_2 (fig. 279; verificaţi calculele). Formula scoasă mai sus rămîne valabilă şi o vom folosi în continuare. Demonstraţia punctului b).

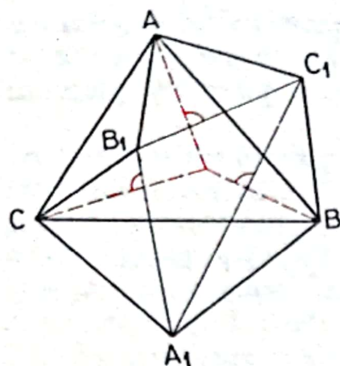


Fig. 277

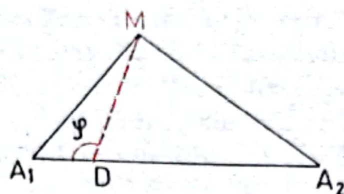


Fig. 278

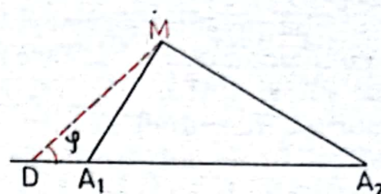


Fig. 279

Relația $k_1(A_1M)^2 - k_1(A_2M)^2 = k$ este echivalentă cu relația $(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = \frac{k}{k_1}$.

Fie D proiecția punctului M pe dreapta A_1A_2. Atunci, după teorema lui Pitagora (vezi fig. 280 și 281)

$$(A_1M)^2 = (A_1D)^2 + (MD)^2,$$
$$(A_2M)^2 = (A_2D)^2 + (MB)^2,$$

de unde

$$(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = (A_1D)^2 - (A_2D)^2 = \frac{k}{k_1}.$$

Astfel problema s-a redus la găsirea pe dreapta A_1A_2 a punctului D care să satisfacă ultima relație. Un astfel de punct se găsește ușor (indicați cum) și el este unic. Punctul M este situat oriunde pe perpendiculara ridicată în punctul D pe dreapta A_1A_2.

Este adevărată și afirmația reciprocă (demonstrați-o): pentru toate punctele unei drepte perpendiculare pe A_1A_2, diferența pătratelor distanțelor la A_1 respectiv A_2 este constantă.

Lema 1 este demonstrată.

Este adevărată și generalizarea sa pentru un număr mai mare de puncte (enunțați și demonstrați).

Lema 2. Fie $A_1, A_2, ..., A_n$ puncte date în plan, $k_1, k_2, ..., k_n$ (toți $k_i \neq 0$) numere date. Atunci, locul geometric al punctelor M care satisfac relația

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 + ... + k_n(A_nM)^2 = \text{constant}$$

va fi:

a) un cerc, un punct sau mulțimea vidă dacă $k_1 + k_2 + ... + k_n \neq 0$;
b) o dreaptă sau tot planul dacă $k_1 + k_2 + ... + k_n = 0$.

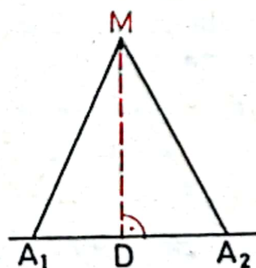


Fig. 280

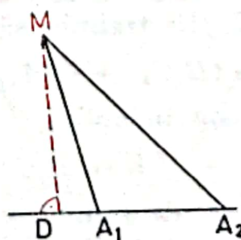


Fig. 281

Demonstrație. Demonstrația se va face prin inducție. Pentru $n = 2$ s-a demonstrat mai sus (cazul întregului plan se obține atunci cînd $k_1 + k_2 = 0$ și A_1 coincide cu A_2. Atunci, pentru toate punctele planului $(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = 0$).

Să presupunem acum că afirmația este adevărată pentru un n oarecare. Vom demonstra că ea este adevărată și pentru $n + 1$. Observăm că dacă $n \geqslant 2$ și toți $k_1, k_2, ..., k_n, k_{n+1}$ nu sînt nuli, atunci printre ei se găsesc doi a căror sumă să nu fie nulă. Fie aceștia k_1 și k_2. Vom lua punctul D construit în demonstrația de la 1 a) și vom folosi formula găsită acolo. Atunci egalitatea

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 + k_3(A_3M)^2 + ... + k_{n+1}(A_{n+1}M)^2 = k$$

poate fi scrisă în forma

$$(k_1 + k_2)(DM)^2 + k_3(A_3M)^2 + ... + k_{n+1}(A_{n+1}M)^2 = k - k_1(A_1D)^2 - k_2(A_2D)^2.$$

Acum în dreapta este o constantă, iar în stînga numărul punctelor s-a micșorat cu unul iar suma tuturor coeficienților nu s-a schimbat. Conform ipotezei de inducție, pentru ultima egalitate afirmația lemei 2 este adevărată. Însemnează că este adevărată și pentru $n + 1$, deci lema 2 este demonstrată.

Lema 3. Pentru ca perpendicularele coborîte din punctele A_1, B_1 și C_1 respectiv pe laturile BC, AC și AB ale triunghiului ABC să fie concurente, este necesar și suficient să fie îndeplinită egalitatea:

$$(A_1B)^2 - (BC_1)^2 + (C_1A)^2 - (AB_1)^2 + (B_1C)^2 - (CA_1)^2 = 0.$$

Demonstrație. *Necesitatea.* Fie P punctul de intersecție a perpendicularelor coborîte din A_1, B_1 și C_1 respectiv pe BC, AC și AB. Din lema 1 b) rezultă egalitățile:

$$(A_1B)^2 - (CA_1)^2 = (PB)^2 - (CP)^2; \quad (B_1C)^2 - (AB_1)^2 = (PC)^2 - (AP)^2;$$
$$(C_1A)^2 - (BC_1)^2 = (PA)^2 - (BP)^2.$$

Adunînd aceste trei egalități, obținem îndeplinirea condiției cerute.

Suficiența. Presupunem că este îndeplinită condiția din textul lemei și fie P punctul de intersecție a perpendicularelor coborîte din A_1 pe BC și din B_1 pe AC. Din lema 1 b) rezultă că

$$(A_1B)^2 - (CA_1)^2 + (B_1C)^2 - (AB_1)^2 = (PB)^2 - (AP)^2.$$

Dar din condiția dată în lema 3 rezultă că membrul stîng este egal cu $(BC_1)^2 - (C_1A)^2$, adică $(BC_1)^2 - (C_1A)^2 = (PB)^2 - (AP)^2$, dar acest lucru însemnează că punctul P este situat pe perpendiculara coborîtă din C_1 pe AB ceea ce trebuia demonstrat.

Lema 4. Dacă perpendicularele coborîte din vîrfurile A_1, B_1, C_1 ale triunghiului ABC pe laturile BC, AC și AB ale triunghiului ABC sînt concurente, atunci și perpendicularele coborîte din punctele A, B și C, respectiv pe dreptele B_1C_1, A_1C_1, și A_1B_1 sînt de asemenea concurente.

Afirmația lemei rezultă direct din simetria relației de la lema 3.

Cu ajutorul lemelor 3 sau 4 putem rezolva problema M 174.

Conform lemei 3 trebuie să verificăm îndeplinirea relației

$$(AB_1)^2 - (B_1C)^2 + (CA_1)^2 - (A_1B)^2 + (BC_1)^2 - (C_1A)^2 = 0.$$

Această relație este îndeplinită pentru că

$$AB = B_1C, \ CA = A_1B, \ BC = C_1A.$$

Se poate utiliza de asemenea și lema 4. Atunci este suficient să observăm că perpendicularele coborîte din punctele A_1, B_1, C_1 pe laturile ABC trec

prin mijloacele laturilor triunghiului ABC şi de aceea se intersectează într-un punct care este centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

I.F. Sarîghin

M 175. *Fiecare latură a unui triunghi echilateral este împărţită în m părţi congruente şi prin punctele de diviziune se duc drepte paralele cu laturile triunghiului care împart triunghiul în m^2 triunghiuri mai mici. Dintre vîrfurile triunghiurilor obţinute trebuie marcate N vîrfuri astfel încît pentru oricare două vîrfuri marcate A şi B segmentul AB să nu fie paralel cu nici una dintre laturile triunghiului. Care este cea mai mare valoare posibilă a lui N, pentru m dat?*

b) împărţim fiecare muchie a unui tetraedru în m părţi congruente şi prin punctele de diviziune ducem plane paralele cu feţele. Dintre vîrfurile poliedrelor obţinute trebuie să alegem N vîrfuri, astfel încît oricare dintre acestea să nu fie situate pe o dreaptă paralelă cu una dintre feţe. Care este cea mai mare valoare posibilă a lui N?

c) dintre soluţiile întregi ale ecuaţiei

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = m$$

care satisfac condiţiile $0 \leqslant x_i \leqslant m$ (pentru $i = 1, 2, \dots, k$) trebuie să se aleagă N soluţii astfel încît în oricare două dintre soluţiile alese nici o necunoscută x_i să nu ia aceeaşi valoare. Care este valoarea maximă posibilă a lui N? (Problemele a) şi b) sînt cazuri particulare ale problemei c), pentru $k = 3$ respectiv $k = 4$.)

M.L. Gherver

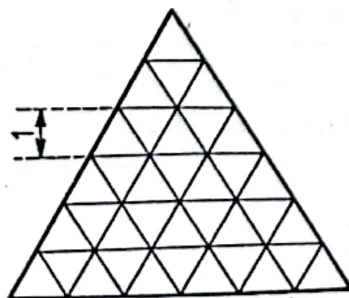
Mai înainte să verificăm faptul că problema a) este caz particular al problemei c) pentru $k = 3$.

Considerăm distanţa dintre două drepte paralele care împart triunghiul, egală cu 1 (fig. 282). Fiecărui punct al triunghiului îi punem în corespondenţă trei numere x_1, x_2, x_3 care exprimă (într-o anumită unitate de lungime) distanţele de la acest punct la laturile triunghiului (fig. 283).

Se verifică uşor că suma $x_1 + x_2 + x_3$ este constantă pentru orice punct al triunghiului. Într-adevăr, să notăm prin $2a$ lungimea unei laturi a triunghiului; atunci, ax_1, ax_2, ax_3 sînt ariile triunghiurilor OA_2A_3, OA_1A_3 şi OA_1A_2 (fig. 283); de aici $a(x_1 + x_2 + x_3)$ este aria triunghiului $A_1A_2A_3$ adică $x_1 + x_2 + x_3$ nu depinde de alegerea punctului O. În unitatea aleasă, $x_1 + x_2 + x_3 = m$ (unde m este numărul de segmente în care a fost împărţită latura triunghiului).

Vîrfurile triunghiurilor mici formate vor avea cele trei numere x_1, x_2 şi x_3 întregi (fig. 284).

În problema a) se cere ca pentru nici o pereche de vîrfuri alese A şi B, segmentul AB să nu fie paralel cu o latură a triunghiului $A_1A_2A_3$. În problema c) se cerea ca în oricare două dintre soluţiile alese nici una dintre


Fig. 282

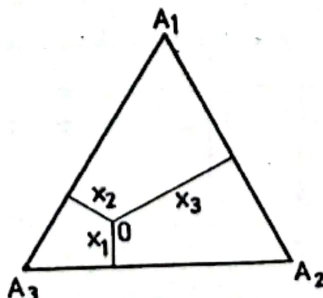


Fig. 283

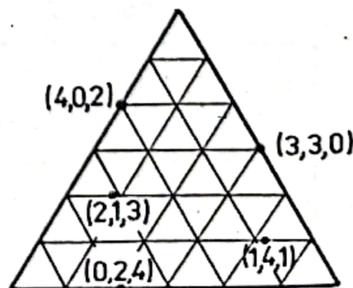


Fig. 284

necunoscutele x_i să nu ia aceeaşi valoare. Ambele cerinţe (a doua pentru $k = 3$) înseamnează, desigur, acelaşi lucru.

În mod analog se verifică că problema b) este echivalentă cu problema c) pentru $k = 4$.

Astfel rămîne de rezolvat problema c). Să o reformulăm:

Presupunem că într-un tablou dreptunghiular format din k coloane şi n linii se pot pune nişte numere naturale astfel încît suma numerelor de pe orice linie să fie egală cu m şi astfel încît pe orice coloană să nu fie două numere la fel. Fie k şi m date. Care este cea mai mare valoare posibilă N, pe care o poate lua n?

Noua formulare este desigur echivalentă cu cea iniţială dar permite să se expună mai simplu şi mai scurt rezolvarea.

Vom demonstra că $N \leqslant \left[\frac{2m}{k}\right] + 1$, unde $\left[\frac{2m}{k}\right]$ reprezintă cel mai mare întreg care nu-l depăşeşte pe $\frac{2m}{k}$. Întrucît numerele dintr-o coloană nu sînt mai multe decît N şi ele nu se repetă, rezultă că suma lor nu este mai mică decît

$$0 + 1 + \dots + (N - 1) = \frac{N(N-1)}{2}.$$

În tablou sînt k coloane. Rezultă că suma numerelor din tot tabloul nu e mai mică decît $\frac{kN(N-1)}{2}$.

Pe de altă parte, suma tuturor numerelor de pe o linie este egală cu m deci suma numerelor din tot tabloul este egală cu Nm.

Astfel, $Nm \geqslant \frac{kN(N-1)}{2}$. Prin urmare, $m \geqslant \frac{k(N-1)}{2}$ şi $\frac{2m}{k} \geqslant N - 1$. Fiindcă $N - 1$ este întreg, rezultă că $\left[\frac{2m}{k}\right] \geqslant N - 1$. Astfel $N \leqslant \left[\frac{2m}{k}\right] + 1$.

Se poate afirma că $N = \left[\frac{2m}{k}\right] + 1$?. Pentru $k = 1$, evident că nu: $N = 1$ dar $\left[\frac{2m}{k}\right] + 1 = 2m + 1$. Dar, se arată că acest caz este singura excepţie: pentru $k \geqslant 2$, $N = \left[\frac{2m}{k}\right] + 1$.

Pentru ca să demonstrăm acest lucru, vom construi pentru orice întregi k şi m ($k \geqslant 2$, $m \geqslant 0$) tablouri $k \times N$ care să satisfacă toate cerinţele problemei.

Fie, la început, k un număr natural arbitrar par: $k = 2r$, $r \geqslant 1$. Dacă $m = rt$, unde t este orice număr natural, atunci $N = t + 1$ (vezi tabela 1)

Tabela 1

0.........0	..t....t....
1.........1	t–1....t–1
....	....
....	....
t–1....t–1	1 1
t.........t	0 0
r coloane	r coloane

Tabela 2

0....0	t....t	t + q
1....1	t–1....t–1	t + q – 1
.....	.....	.....
.....	.....	.....
t–1....t–1	1....1	q + 1
t....t	0....0	q
r coloane		(r–1) coloane

Dacă $m = rt + q$, unde $0 < q < r$, atunci la toate numerele ultimei coloane a tabelei 1 trebuie adăugat cîte un q (vezi tabela 2); N rămîne $t + 1$. Astfel, pentru k par, tabela este construită pentru orice m.

Pentru construirea tabelelor pentru orice $k > 1$, impar să ne ocupăm separat de cazul $k = 3$.

Pentru $k = 3$, dacă $m = 3t$ sau $m = 3t + 1$ rezultă $N = 2t + 1$ (tabelele 3 şi 4) şi dacă $m = 3t - 1$ atunci $N = 2t$ (tabela 5).

Tabela 3

0	t	$2t$
2	$t-1$	$2t-1$
4	$t-2$	$2t-2$
.	.	.
.	.	.
$2t$	0	t
1	$2t$	$t-1$
3	$2t-1$	$t-2$
5	$2t-2$	$t-3$
.	.	.
.	.	.
$2t-1$	$t+1$	0

Tabela 4

0	t	$2t+1$
2	$t-1$	$2t$
4	$t-2$	$2t-1$
.	.	.
.	.	.
$2t$	0	$t+1$
1	$2t$	t
3	$2t-1$	$t-1$
5	$2t-2$	$t-2$
.	.	.
.	.	.
$2t-1$	$t+1$	1

Tabela 5

0	$t-1$	$2t$
2	$t-2$	$2t-1$
4	$t-3$	$2t-2$
.	.	.
.	.	.
$2t-2$	0	$t+1$
1	$2t-1$	$t-1$
3	$2t-2$	$t-2$
5	$2t-3$	$t-3$
.	.	.
.	.	.
$2t-1$	t	0

Observaţie. Fig 284 corespunde tabelei 3 pentru $k = 3$, $m = 6$.

Fie acum, $k = 3 + 2r$ un număr impar oarecare mai mare decît trei şi m orice număr natural. Vom nota prin p restul împărţirii lui m prin k şi vom considera două cazuri: 1) $0 \leqslant p \leqslant r + 1$, 2) $r + 2 \leqslant p \leqslant 2r + 2$.

În primul caz $m = kt + q$, $0 \leqslant q = p \leqslant r + 1$, $N = 2t + 1$ iar respectiva tabelă se obţine adăugînd la tabela 3, $2r$ coloane care se obţin dacă în tabela 2 se înlocuieşte t prin $2t$.

În al doilea caz $m = k(t - 1) + r + 2 + q$, $0 \leqslant q \leqslant r$, $N = 2t$, iar respectiva tabelă se obţine prin adăugarea la tabela 5 a $2r$ coloane care se obţin dacă în tabela 2 se înlocuieşte t prin $2t - 1$.

M.L. Gherver

M 176. *De care latură a triunghiului ABC este mai aproape ortocentrul triunghiului dacă* $\sphericalangle A < \sphericalangle B < \sphericalangle C$? *De care vîrf este mai aproape?*

L. Snaider (elevă clasa a IX-a)

Vom nota înălţimile prin AK, BM, CP şi punctul lor de intersecţie prin O. Distanţele de la punctul O la laturi sînt egale cu OK, OM, OP.

Presupunem că $C \neq 90°$. Atunci $OK < OM < OP$.

Vom demonstra prima inegalitate (a doua se demonstrează analog). Într-adevăr,

$$\frac{OM}{OC} = \frac{AP}{AC} = \cos \sphericalangle A, \quad \frac{OK}{OC} = \frac{BP}{BC} = \cos \sphericalangle B.$$

Întrucît $\sphericalangle A < \sphericalangle B$, rezultă $\cos \sphericalangle A > \cos \sphericalangle B$, de unde $OM > OK$ c.c.t.d.

Distanţele de la O la vîrfuri sînt situate în ordinea următoare

$$OA > OB > OC.$$

Vom demonstra prima inegalitate (a doua se demonstrează analog).

$$\frac{OA}{OP} = \frac{1}{\sin \sphericalangle OAP} = \frac{1}{\cos \sphericalangle B}, \quad \frac{OB}{OP} = \frac{1}{\sin \sphericalangle OBP} = \frac{1}{\cos \sphericalangle A}$$

de unde $OA > OB$. Rezolvarea dată este valabilă pentru toate triunghiurile afară de cele dreptunghice. Găsiţi răspunsul pentru acest caz singuri.

M 177. *Să se găsească toate soluţiile ecuaţiei*

$$\sqrt[n]{x^n - a^n} + \sqrt[n]{2a^n - x^n} = a$$

unde a este un număr real dat iar n este un număr natural mai mare decît 1.

T. Temirov

Analizăm la început cazul particular $a = 0$. Obţinem

$$\sqrt[n]{x^n} + \sqrt[n]{-x^n} = 0$$

Dacă n este par, atunci singura soluţie va fi $x = 0$. Dacă n este impar atunci orice număr real x este soluţie.

Fie acum $x \neq 0$. Notăm $\sqrt[n]{x^n - a^n}$ prin y şi $a - y = z$ şi obţinem sistemul

$$\begin{cases} y + z = a \\ y^n + z^n = a^n. \end{cases} \tag{1}$$

Fie

$$\begin{cases} y = a \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = a. \end{cases}$$

În aceste cazuri ambele ecuaţii sînt satisfăcute. Să calculăm pe x:

$$x^n = 2a^n \quad \text{sau} \quad x^n = a^n.$$

Aceste egalităţi sînt îndeplinite pentru

$$x = \begin{cases} a\sqrt[n]{2} \\ \pm a\sqrt[n]{2} \end{cases} \quad \text{şi} \quad x = \begin{cases} a \text{ dacă } n \text{ este impar} \\ \pm a \text{ dacă } n \text{ este par} \end{cases}$$

respectiv. Înlocuind aceste valori ale lui x în acuaţia iniţială obţinem în ambele cazuri acelaşi lucru:

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Aceasta este adevărată:

pentru orice a, dacă n este impar,

pentru $a \geqslant 0$ dacă n este par.

Să demonstrăm acum că dacă $a \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, sistemul (1) nu are soluţie. Este suficient să se considere cazul în care $a > 0$, $y \geqslant z$. Într-adevăr, dacă $\{y, z, a\}$ este soluţia sa cu $a < 0$ atunci şi $\{-y, -z, -a\}$ este soluţie. Mai departe, dacă în soluţie y şi z schimbă locurile obţinem din nou o soluţie.

Însemnează că dacă există o soluţie pentru $a \neq 0$ există soluţie şi pentru $a > 0$, astfel încît $y \geqslant z$.

Să considerăm două cazuri

a) $z > 0$. Atunci

$$y^n + z^n = (y + z)^n \qquad (2)$$

de unde $z^n = (y + z)^n - y^n = (y + z - y)[(y + z)^{n-1} + ... + y^{n-1}]$. Dar $z^n < z(y + z)^{n-1}$ deci egalitatea (2) nu este posibilă.

b) $z < 0$. Punem $z = -w$.

Pentru n par, sistemul (1) ia forma

$$\begin{cases} y - w = a \\ y^n + w^n = a^n. \end{cases}$$

Nu are soluţii, fiindcă din prima ecuaţie rezultă $y > a$, de unde $y^n > a^n$ şi cu atît mai mult $y^n + w^n > a^n$. Pentru n impar, sistemul (1) are forma:

$$\begin{cases} y - w = a \\ y^n - w^n = a^n \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} a + w = y \\ a^n + w^n = y^n \end{cases}$$

care este analog cu cazul a).

Astfel, iată răspunsul definitiv.

Dacă n este impar, pentru orice $a \neq 0$, $x_1 = a\sqrt[n]{2}$, $x_2 = a$; pentru $a = 0$, orice număr este soluţie.

Dacă n este par, atunci, pentru $a > 0$, $x_{1,2} = \pm a\sqrt[n]{2}$, $x_{3,4} = \pm a$, pentru $a = 0$, $x = 0$ şi pentru $a < 0$, nu are soluţii.

A.L.Toom

M 178. *Coborîm dintr-un punct arbitrar P al bisectoarei unghiului A al triunghiului ABC perpendicularele PA_1, PB_1, PC_1 respectiv pe laturile BC, CA şi AB. Fie R punctul de intersecţie a dreptelor PA_1 şi B_1C_1. Să se demonstreze că dreapta AR împarte latura BC în două părţi egale.*

Vom duce prin punctul R o dreaptă paralelă cu latura BC. Ea intersectează laturile AC şi AB respectiv în punctele B_2 şi C_2. Vom demonstra că R este mijlocul segmentului B_2C_2; în acest caz şi numai în acest caz dreapta AR împarte pe BC în două părţi egale. Întrucît $PR \perp B_2C_2$, pentru acest lucru trebuie demonstrat că triunghiul B_2PC_2 este isoscel. Vom demonstra congruenţa unghiurilor C_2B_2P şi B_2C_2P. Patrulaterul RC_2C_1P este inscriptibil (acest lucru rezultă din $\sphericalangle C_2RP = \sphericalangle C_2C_1P = 90°$), rezultă că $\sphericalangle RC_2P = \sphericalangle RC_1P$. La fel se dovedeşte inscriptibil patrulaterul AC_1PB_1 ($\sphericalangle AC_1P = \sphericalangle AB_1P = 90°$), prin urmare, $\sphericalangle B_2C_2P = \sphericalangle PC_1B_1 = \sphericalangle PAB_1$. Raţionamente analoage pentru patrulaterele B_2B_1RP, şi B_1AC_1P arată că $\sphericalangle C_2B_2P = \sphericalangle PAC_1$. Dar AP este bisectoarea unghiului A, astfel încît congruenţa unghiurilor C_2B_2P şi B_2C_2P este demonstrată. Problema este rezolvată.

I.F. Şarîghin

M 179. *Pentru orice triunghi care nu este dreptunghic, T, vom nota prin $T_1 = H(T)$ triunghiul ortic, adică triunghiul ale cărui vîrfuri sînt picioarele înălţimilor triunghiului T; prin $T_2 = H(T_1)$ triunghiul ortic al triunghiului T_1, şi aşa mai departe, $T_3 = H(T_2)$, $T_4 = H(T_3)$ ...*

Cum trebuie să fie unghiurile triunghiului T, pentru ca:

a) triunghiul $H(T)$ să fie ascuţitunghic?

b) în şirul T_1, T_2, T_3, ... să se întîlnească un triunghi dreptunghic T_n (în acest caz $H(T_n) = T_{n+1}$ nu este definit)?

c) triunghiul $T_3 = H(H(H(T)))$ să fie asemenea cu triunghiul T?

d) Pentru fiecare $n = 1, 2, 3, \ldots$ să se indice cîte triunghiuri T neasemenea între ele există, astfel încît T_n să fie asemenea cu T.

N.B. Vasiliev

Fie AA_1, BB_1, CC_1 înălţimile triunghiului T.

Măsurile α_1, β_1, γ_1, ale unghiurilor A_1, B_1, C_1 ale triunghiului $A_1B_1C_1$ se exprimă prin măsurile α, β, γ ale unghiurilor A, B, C ale triunghiului ABC în felul următor

$$\alpha_1 = \pi - 2\alpha, \quad \beta_1 = \pi - 2\beta, \quad \gamma_1 = \pi - 2\gamma \qquad (I_1)$$

dacă nici unul dintre unghiurile α, β, γ, nu depăşeşte $\frac{\pi}{2}$:

$$\alpha_1 = 2\alpha - \pi, \quad \beta_1 = 2\beta, \quad \gamma_1 = 2\gamma \qquad (I_2)$$

dacă A este obtuz;

$$\alpha_1 = 2\alpha, \quad \beta_1 = 2\beta - \pi, \quad \gamma_1 = 2\gamma \qquad (I_3)$$

dacă B este obtuz;

$$\alpha_1 = 2\alpha, \quad \beta_1 = 2\beta, \quad \gamma_1 = 2\gamma - \pi \qquad (I_4)$$

dacă C este obtuz.

Pentru demonstraţie se poate folosi faptul că punctele A_1 şi B_1 sînt situate pe cercul de diametru AB şi consideraţii analoage pentru celelalte perechi de puncte (fig. 285 şi 286).

Din formulele I rezultă că toate cele trei unghiuri A_1, B_1, C_1 sînt ascuţite, atunci şi numai atunci cînd este îndeplinită una dintre următoarele două condiţii: sau toate măsurile α, β, γ sînt cuprinse între $\frac{\pi}{4}$ şi $\frac{\pi}{2}$ sau două dintre ele sînt mai mici decît $\frac{\pi}{4}$ iar a treia este mai mică decît $\frac{3\pi}{4}$.

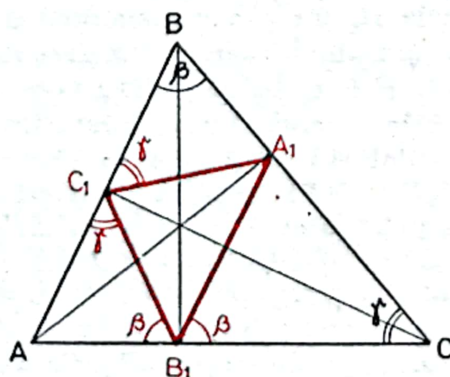


Fig. 285

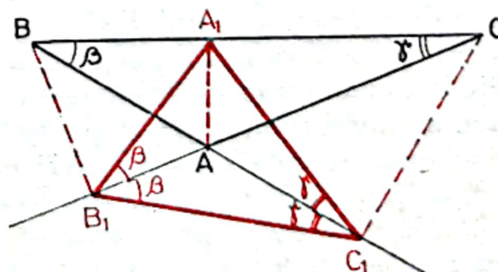


Fig. 286

Să observăm că α_1, pentru α dat poate să fie egal numai cu unul dintre următoarele trei numere: $2\alpha - \pi$, $\pi - 2\alpha$, sau 2α; respectiv α poate să fie egal cu $\frac{\pi + \alpha_1}{2}$, $\frac{\pi - \alpha_1}{2}$ sau $\frac{\alpha_1}{2}$. De aici rezultă că $\alpha_1 = \frac{\pi k}{2^m}$ (k, m numere întregi oarecare) atunci şi numai atunci cînd $\alpha = \frac{\pi l}{2^{m+1}}$ (l este un număr întreg oarecare). De aceea, şirul T_1, T_2, T_3 ... . „degenerează" (adică un anumit triunghi T_{n+1} este dreptunghic) atunci şi numai atunci cînd unul dintre numerele α, β sau γ este egal cu $\frac{\pi s}{2^n}$, unde s şi n sînt numere întregi pozitive oarecare.

Acum vom trece la o chestiune mai dificilă: în ce caz triunghiul T_n este asemenea cu T. Vom începe cu $n = 1$. Pentru ca triunghiurile care au unghiurile de măsuri $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ respectiv (α, β, γ) să fie asemenea trebuie ca tripletul de numere $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ după o anumită permutare a lor să coincidă cu (α, β, γ). Este evident că se poate studia numai cazul

$$\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma. \tag{2}$$

Unghiurile oricărui triunghi pot să fie notate astfel încît măsurile lor să satisfacă inegalităţile (2).

Dacă $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (adică toate unghiurile sînt ascuţite), atunci, întrucît din (2) rezultă inegalităţile $2\pi - \alpha \leqslant 2\pi - \beta \leqslant 2\pi - \gamma$, pentru asemănarea triunghiurilor T_1 şi T trebuie să fie adevărat sistemul

$$\pi - 2\alpha = \gamma, \quad \pi - 2\beta = \beta, \quad \pi - 2\gamma = \alpha$$

de unde $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Dacă $\alpha > \frac{\pi}{2}$, atunci din (2) putem folosi numai faptul că $2\beta \geqslant 2\gamma$ şi trebuie examinate trei relaţii posibile între unghiurile α_1, β_1 şi γ_1: $2\beta \geqslant 2\gamma \geqslant 2\alpha - \pi$, $2\beta \geqslant 2\alpha - \pi \geqslant 2\gamma$ şi $2\alpha - \pi \geqslant 2\beta \geqslant 2\gamma$. Prima dintre ele duce la sistemul

$$2\beta = \alpha, \quad 2\gamma = \beta, \quad 2\alpha - \pi = \gamma$$

de unde găsim o soluţie interesantă: $\alpha = \frac{4\pi}{7}$, $\beta = \frac{2\pi}{7}$, $\gamma = \frac{\pi}{7}$, iar celelalte două, aşa cum se vede uşor, conduc la soluţii „degenerate" (unul dintre unghiuri este nul) care nu convin sau, cum se spune „nu intră în domeniul valorilor admisibile".

Pentru alte valori ale lui n indicăm planul raţionamentelor ulterioare. Din (I) prin inducţie se pot obţine formulele următoare pentru unghiurile triunghiului:

$$\alpha_n = s2^n\alpha + p\pi$$
$$\beta_n = s2^n\beta + q\pi$$
$$\gamma_n = s2^n\gamma + r\pi$$

unde s este egal cu $+1$ sau -1, p, q şi r sînt numere întregi (demonstraţi că pentru α, β şi γ daţi şi cu condiţiile suplimentare $\alpha_n \geqslant 0$, $\beta_n \geqslant 0$, $\gamma_n \geqslant 0$, $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \pi$, parametrii p, q, r se determină din (3) în mod unic). Vom scrie şase sisteme egalînd tripletul $(\alpha_n, \beta_n \gamma_n)$ cu cele şase permutări

ale lui (α, β, γ) și-l vom rezolva pe fiecare. Dintre soluțiile găsite (care depind de parametrii p, q, r, s) alegem pe acelea care satisfac condițiile $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Pentru ca să răspundem la întrebarea: cîte soluții există (pentru un n dat) trebuie să vedem cîte soluții în numere întregi p, q, r, s (unde $s = \pm 1$) admit cele șase sisteme de inecuații. Pentru ca să se realizeze acest plan ar trebui să umplem multe pagini de calcule. Dar se poate găsi răspunsul fără nici un sistem și nici o inegalitate dacă chemăm în ajutor... geometria. Ne vom mulțumi aici să indicăm cum se alege o interpretare geometrică comodă a problemei (cu totul deosebită de cea cu care am început).

Desenăm un triunghi echilateral y de înălțime egală cu π. Fiecare triplet de numere pozitive (α, β, γ) astfel încît $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ corespunde unui punct din interiorul triunghiului care are distanțele la cele trei laturi egale, respectiv cu α, β și γ (fig. 287). Această corespondență dintre tripletele (α, β, γ) și punctele T ale triunghiului este bijectivă. Permutările „coordonatelor" α, β, γ, corespund la transformările lui y în el însuși cu păstrarea distanței (rotații și simetrii). Transformarea H dată de formulele (I) este reprezentată în figura 288; pe liniile mijlocii ale lui y ea nu este definită; pe fiecare dintre cele patru triunghiuri (corespunzătoare celor patru cazuri ale formulei (I)) ea îl mărește de două ori și îl reprezintă pe întregul triunghi y (o asemănare de raport 2 care transformă un segment într-un segment paralel). În figura 289 este dat răspunsul la punctul a). Sînt colorate acele puncte ale triunghiului y care corespund unui triunghi $H(T)$ ascuțitunghic.

Prin inducție după n se stabilește că transformarea H^n poate fi caracterizată astfel: pe dreptele paralele cu laturile triunghiului și care împart înălțimea în 2^n părți congruente, H^n nu este definită; în fiecare dintre cele 2^{2n} triunghiuri în care aceste drepte împart triunghiul y, H^n este o asemănare de raport 2^n care reprezintă acest triunghi în întregul triunghi y (În fig. 290 este reprezentată H^2).

Condiția $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ determină unul dintre cele șase triunghiuri în care este împărțit triunghiul y de înălțimile sale. Pe acest triunghi dreptunghic îl notăm y_1, iar pe celelalte așa cum se vede în figura 291 respectiv $y_2, \ldots, y_6$. Fie $f_j : y \to y$ o transformare a lui y astfel încît $f_j(y_j) = y_1$. Dacă fiecare dintre cele 2^{2n} triunghiuri mici în care este împărțit triunghiul y se împarte în șase triunghiuri de către înălțimile sale, atunci y_1 se va împărți în 2^{2n} triunghiuri asemenea cu el (în raportul $1 : 2^n$) pe care le vom nota x_j, $1 \leqslant j \leqslant 2^{2n}$ (fig. 292). După transformarea H^n, fiecare triunghi x_i trece într-un anumit y_j și apoi, dacă permutăm numerele din tripletul $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ în ordine descrescătoare, adică aplicăm pe f_j, atunci produsul celor două transformări $f_j \cdot H^n$ îl transformă pe x_i în y_1 (o transformare de asemănare cu raportul 2^n).

Afirmăm că în fiecare dintre cele 2^{2n} triunghiuri $x_i \subset y_1$ există exact un singur punct $P_i \in x_i$ astfel încît $f_j(H^n(P_i)) = P_i$. Din aceste puncte — care de fapt ar constitui răspunsul de la punctul d) — trebuie excluse punctele

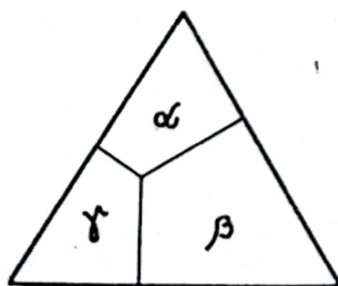


Fig. 287

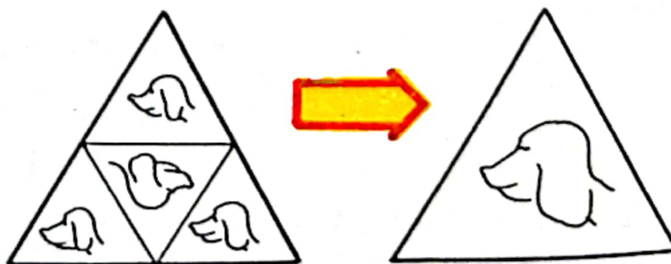


Fig. 288

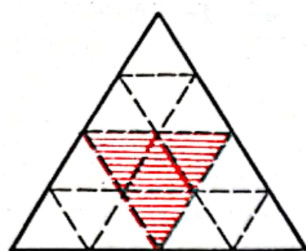
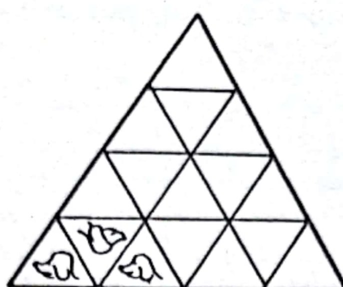


Fig. 289



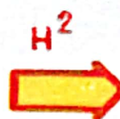




Fig. 290

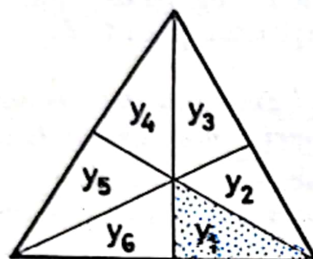


Fig. 291

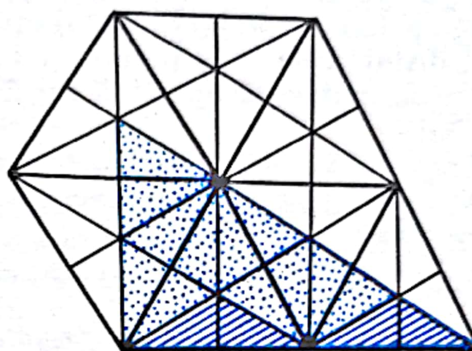


Fig. 292

fixe ale acelor triunghiuri x_i ale căror catete mari sînt așezate pe cateta mare a triunghiului y_1 (acestea sînt în număr egal cu raportul de asemănare 2^n), întrucît pentru acestea (și cum se vede ușor numai pentru acestea) punctul fix cade pe frontieră, acolo unde transformarea H^n nu este definită. De aici rezultă că răspunsul la punctul d) este $2^{2n} - 2^n$.

Rămîne să demonstrăm afirmația privitoare la punctele fixe. Pentru aceasta, vom aplica triunghiului y_1 și transformării p, $p : y_i \to x_i$, inversa transformării $f_j \cdot H^n$ următoarea teoremă:

T e o r e m ă: Fie Z o figură oarecare din plan (toate punctele de frontieră ale lui Z se consideră că aparțin lui Z) și $p : Z \to Z$ o transformare de asemănare de raport $k < 1$. Atunci există un singur punct fix al transformării p, care aparține lui Z, adică un punct $z_0 \in Z$ pentru care $p(z_0) = z_0$.

Demonstrația teoremei pentru o figură mărginită Z (și numai acest caz ne interesează), cel mai simplu se poate face astfel. Fie $Z_n = p^n(Z)$ (rezultatul aplicării de n ori a lui p). Atunci $Z \supset Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \dots$ și intersecția tuturor Z_n constă dintr-un singur punct z_0 (fig. 293). Acesta este chiar punctul fix al transformării p*).

O altă demonstrație care permite să se indice punctul fix și este valabilă și pentru figurile nemărginite Z se poate obține cu ajutorul numerelor complexe. Orice transformare care este asemănare a planului, poate fi scrisă ca rezultatul aplicării succesive a unei rotații, unei omotetii de coeficient k și a unei translații: $z \xrightarrow{p} az + b$ și eventual a unei simetrii relative la o dreaptă: $z \xrightarrow{p} a\bar{z} + b$ (aici a și b sînt numere complexe, $|a| = k$, $\bar{z} = x - iy$

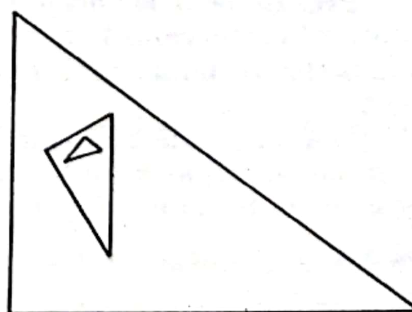


Fig. 293

* Nota trad. Deși afirmația este corectă, demonstrația este „numai schițată".

conjugatul lui $z = x + iy$). În primul caz, punctul fix se găsește ca soluția ecuației

$$z_0 = az_0 + b \Rightarrow z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{b + \bar{a}b}{1 - k^2}$$

în al doilea caz, ca soluție a sistemului de ecuații

$$\begin{cases} z_0 = a\bar{z}_0 + b \\ \bar{z}_0 = \bar{a}z_0 + \bar{b} \end{cases} \Rightarrow z_0 = \frac{b + a\bar{b}}{1 - a\bar{a}} = \frac{b + a\bar{b}}{1 - k^2}.$$

În ambele cazuri este clar că z_0 nu poate să fie în afara figurii Z: dacă distanța ρ de la z_0 pînă la cel mai apropiat de el punct al lui Z ar fi pozitivă, atunci distanța de la z_0 pînă la $p(z_1)$ ar trebui să fie egală cu $k\rho < \rho$ și deci $p(z_1)$ nu ar putea să aparțină lui Z deși după ipoteză $p(Z) \subset Z$.

Desgiur că teorema despre existența punctului fix pentru o asemănare de coeficient $k < 1$, se poate demonstra și pur geometric fără treceri la limită și numere complexe.

N.B. Vasiliev

M 180. *Două persoane joacă următorul joc. Unul se gîndește la un număr natural n, iar celălalt pune întrebări de tipul „este adevărat că $n \geqslant x$“ (x se poate lua după aprecierea sa) și primește răspunsuri „da“ sau „nu“. Fiecărei strategii posibile T a celui de al doilea jucător îi asociem funcția $f_T(n)$ egală cu numărul întrebărilor (pînă la ghicire) dacă a fost gîndit numărul n.*
Fie de exemplu, strategia T care constă în faptul că la început se pun întrebările: „este adevărat că $n \geqslant 10$?“, „este adevărat că $n \geqslant 20$?“, ..., pînă cînd, la o anumită întrebare „este adevărat că $n \geqslant 10(k+1)$?“ se va da răspunsul „nu“ și apoi se pun întrebările „este adevărat că $n \geqslant 10k + 1$?“, „că $n \geqslant 10k + 2$?“ ș.a.m.d. Atunci $f_T(n) = \frac{n-a}{10} + a + 2$, unde a este ultima cifră a numărului n, deci $f_T(n)$ crește aproximativ ca $\frac{n}{10}$.

a) Propuneți o strategie în care funcția $f_T(n)$ să crească cît mai încet posibil.

b) Comparînd două strategii este util să introducem în locul funcției $f_T(n)$ funcția $f'_T(n) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} f_T(k)$ care arată după ce număr de întrebări se poate ghici orice număr care nu-l depășește pe n. Evaluați inferior pe $f'_T(n)$ pentru o strategie oarecare T.

Ia. M. Barzdin

Presupunem la început că n nu este un număr natural arbitrar ci este cuprins în intervalul $1 \leqslant n \leqslant N$ unde N este un număr dat. Atunci problema minimalizării numărului maxim de întrebări pentru ghicirea lui n este cunoscută.

Cea mai bună strategie, să o numim S_n, constă în faptul că fiecare întrebare nouă, împarte intervalul valorilor pe care le-ar mai putea lua necunoscuta n, în două părți egale (sau diferind prin 1). Anume, dacă știm deja că $a \leqslant n < b$, atunci trebuie pusă întrebarea: „este adevărat că $n \geqslant \frac{a+b}{2}$?“. Strategia S_n este descrisă.

Se poate demonstra că numărul maxim de întrebări pentru ghicirea numărului $n \leqslant N$, prin utilizarea lui S_n este egal cu $]\log_2 N[$ unde $]l[$ reprezintă cel mai mic număr întreg, mai mare sau egal cu l.

Răspundem acum la întrebarea b). Vom demonstra că pentru orice strategie T şi orice număr n,

$$f'_T(n) \geqslant]\log_2 n[.$$

Demonstraţie. Presupunem că s-a dat numărul natural N şi numărul necunoscut n se găseşte în intervalul de la 1 la N. Fie $2^{m-1} < N \leqslant 2^m$.

Atunci, cel mai mare interval P_1 al valorilor pe care le mai poate lua n după prima întrebare, este strict mai mare decît 2^{m-2}, cel mai mare interval P_2 în care se poate găsi n după a doua întrebare este mai mare decît 2^{m-3} ş.a.m.d. Prin inducţie obţinem că cel mai mare interval P_{m-1} în care se poate găsi numărul n după $m-1$ întrebări este mai mare decît 1. Rezultă că numărul maxim de întrebări (pentru răspunsurile cele mai nefavorabile) nu e mai mic decît

$$m =]\log_2 N[. \tag{1}$$

Să ne ocupăm de chestiunea (a) a problemei.

Presupunem că am pus cîteva întrebări de tipul „este adevărat că $n \geqslant x$" şi am obţinut răspunsurile „da"; numărul n este tot timpul mai mare sau egal cu x. E clar că următorul x trebuie să se ia mai mare decît toţi cei deja utilizaţi (altfel această întrebare va fi inutilă).

Astfel, la începutul jocului, trebuie să se mărească x pînă cînd cel care răspunde va zice prima oară „Nu". Fie $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ şirul pe care cel care ghiceşte a hotărît să-l spună pînă cînd primeşte primul răspuns „nu". El trebuie să fie infinit fiindcă n poate să fie oricît de mare.

Acum urmează a doua etapă a jocului: la întrebarea k, primul jucător răspunde prima oară „nu". Astfel $x_{k-1} \leqslant n < x_k$.

Mai departe se poate aplica strategia analoagă cu strategia S_n descrisă mai sus, împărţind intervalul rămas de fiecare dată în două. Evident că, astfel, se vor folosi pentru acest lucru, pînă la $]\log_2(x_k - x_{k-1})[$ întrebări.

Pentru a determina complet strategia rămîne să alegem şirul crescător x_k.

Vom analiza trei strategii concrete care se deosebesc doar prin alegerea şirului x_k.

1. Strategia T^1: $x_k = 10k$. Atunci, aşa cum s-a arătat în textul problemei, $f_T(n)$ creşte aproximativ ca $\frac{n}{10}$.

2. Strategia T^2 : $x_k = 2^k$. Atunci numărul întrebărilor în prima etapă nu e mai mare decît $]\log_2 n[$, iar numărul întrebărilor din etapa a doua nu e mai mare decît $\left]\log_2 \frac{n}{2}\right[$. În total se obţin aproximativ $2 \log_2 n$ întrebări.

3. Strategia T^3 : $x_k = 2^{2^k}$. Acum numărul întrebărilor din prima etapă se micşorează mult. Într-adevăr, fie

$$2^{2^{k-1}} \leqslant n < 2^{2^k}. \tag{2}$$

Atunci numărul întrebărilor din prima etapă a jocului este egal cu k şi nu depăşeşte

$$k \leqslant \log_2\log_2 n + 1,$$

adică pentru n mare, este destul de mic faţă de $\log_2 n$. În a doua etapă utilizăm aproximativ

$$\log_2(2^{2^k} - 2^{2^{k-1}}) \approx \log_2 2^{2^k} = 2^k$$

întrebări. Acest lucru este un rezultat bun sau rău? Aceasta depinde de numă-

rul n. Se arată că pentru cel mai mare n din intervalul (2), această strategie este mai bună decît pentru cel mai mic n din acelaşi interval.

Fie $n = 2^{2^k} - 1$. Atunci $f_{T^3}(n) \approx \log_2\log_2 n + 2^k \approx \log_2 n + \log_2\log_2 n$. Pentru n mare, al doilea termen este simţitor mai mic decît primul şi raportul dintre $f_{T^3}(n)$ şi evaluarea inferioară $\log_2 n$ (vezi formula (1)) este aproape de 1.

Fie acum $n = 2^{2^{k-1}}$. Atunci mărimea $f_{T^3}(n)$ este aceeaşi şi exprimată prin n ea este

$$f_{T^3}(n) \approx \log_2\log_2 n + 2^k \approx 2\log_2 n + \log_2\log_2 n$$

adică aproximativ de două ori depăşeşte evaluarea inferioară (1). Astfel, pentru aceste valori ale lui n, strategia T^3 nu este mai bună decît strategia T^2.

Această situaţie este ilustrată grafic în figura 294. Pe acest grafic, linia roşie reprezintă evaluarea inferioară de mai sus: $\log_2 n$ (graficul este neprecis).

Linia neagră în trepte reprezintă graficul funcţiei $f_{T^3}(n)$. Această funcţie este constantă pe fiecare interval de forma (2). La capătul unui astfel de interval evaluarea inferioară aproape că o atinge şi apoi deodată, printr-un salt $f_{T^3}(n)$ se măreşte şi devine aproximativ de două ori mai mare.

Se ridică întrebarea: există o astfel de strategie T^4, pentru care $f_{T^4}(N)$ pentru toţi n să nu difere prea mult de evaluarea inferioară? (Graficul presupus al lui $f_{T^4}(n)$ este trasat cu albastru.)

Vom descrie acum strategia T^4 astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{T^4}(n)}{\log_2 n} = 1, \tag{3}$$

adică depăşirea funcţiei $f_{T^4}(n)$ faţă de $\log_2 n$ să tindă către zero pentru n mare.

Prima etapă a jocului, ca şi mai sus este definită de şirul de numere $x_k = 2^{2^k}$. Presupunem că la întrebarea k, obţinem primul răspuns „nu", de unde $2^{2^{k-1}} \leqslant n < 2^{2^k}$. Descriem strategia T^4, pentru etapa a doua. Ataşăm fiecărui n din intervalul (2) o „pondere" egală cu $1/n$. Vom pune acum întrebări astfel încît să se împartă aproximativ în două nu numărul de valori pe care le poate lua n ci suma ponderilor lor.

Să calculăm aproximativ cîte întrebări vor duce la ghicirea unui număr oarecare n din intervalul (2). Punem $m = 2^{2^{k-1}}$. La început suma ponderilor este aproximativ egală cu

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{m^2} \approx \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m^2}\right) - \left(1 + \dots + \frac{1}{m}\right) \approx$$
$$\approx \ln(m^2) - \ln m = \ln m \leqslant \ln n.$$

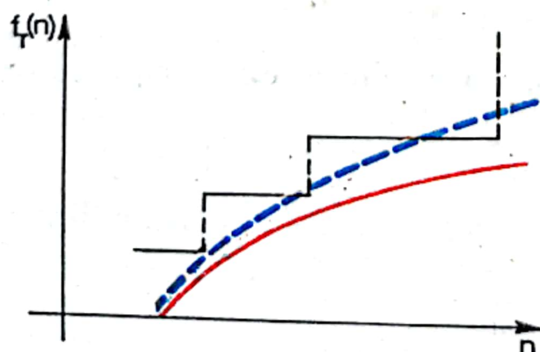


Fig. 294

Dacă îl ghicim pe n, atunci vom aduce suma ponderilor pînă la $\frac{1}{n}$. Rezultă că suma ponderilor se micşorează aproximativ de $n \ln n$ ori. Să presupunem că de fiecare dată am reuşit să o împărţim în două părţi exact. Atunci sînt necesare un număr de

$$\log_2 n \ln n = \log_2 n + \log_2 \ln n = \log_2 n$$

întrebări (al doilea termen, pentru

n mare, este simţitor mai mic decît primul). Întrucît suma ponderilor, de obicei nu reuşim să o împărţim în două părţi egale, numărul întrebărilor, în realitate este ceva mai mare. Se poate arăta (dar acest lucru este mai greu) că acest număr nu depăşeşte pe $\log_2 n + const \cdot \log_2 \log_2 n$. Adăugînd numărul întrebărilor din prima etapă, mărim coeficientul termenului al doilea. Astfel am construit o strategie care permite să se ghicească orice n, după un număr nu mai mare de

$$\log_2 n + const.\ \log_2 \log_2 n$$

întrebări.

Se poate demonstra uşor că această funcţie satisface condiţia (3).

Ia. M. Bardzin, A.L. Toom

M 181. *Care este cea mai mică lungime pe care trebuie să o aibă o bucată de sîrmă din care se poate face o colivie pentru un cub cu latura de 10 cm? (Sîrma poate trece de-a lungul unei muchii de două ori, se poate îndoi la 90° şi la 180° dar nu se poate rupe.)*

R ă s p u n s. Trebuie cel puţin 150 cm de sîrmă. În figura 295 se arată cum se poate face colivia dintr-o sîrmă de această lungime. Rămîne să se demonstreze că dintr-o bucată mai scurtă de sîrmă, nu se poate face colivie. Presupunem temporar că îndoim sîrma numai în vîrfurile cubului şi că sîrma din care este făcută colivia începe şi se termină în vîrfurile cubului. Să evaluăm numărul de muchii ale acestei colivii. Desigur că nu vom număra muchiile cubului — acestea sînt 12 — ci numărul muchiilor făcute din sîrmă. În colivie, există un singur vîrf în care se termină sîrma şi un singur vîrf din care începe (ele pot să şi coincidă). Vom numi aceste vîrfuri extreme şi pe toate celelalte, de trecere. La fiecare vîrf de trecere ajung un număr par de muchii. Într-adevăr, sîrma care intră în acest vîrf, trebuie să şi iasă din el. La un vîrf extrem ajung cel puţin trei muchii. De aceea numărul muchiilor este cel puţin $\frac{6 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{2} = 15$. Într-adevăr, fiecare muchie ajunge la două vîrfuri, de aceea, dacă la vîrful cu numărul i ajung c_i muchii ($i = 1, 2, \ldots, 8$), atunci $c_1 + c_2 + \ldots + c_8$ este egală cu dublul numărului muchiilor. Astfel în colivie sînt cel puţin 15 muchii şi fiindcă lungimea unei muchii este de 10 cm rezultă că trebuie cel puţin 150 cm de sîrmă.

A mai rămas de demonstrat că dacă se îndoaie sîrma în punctele interioare ale muchiilor, tot nu se poate face o colivie cu mai puţin de 150 cm de sîrmă. Această situaţie se poate reduce la cea precedentă în modul următor: fără a mări lungimea sîrmei, orice colivie se poate transforma astfel încît toate îndoiturile să fie în vîrfuri. Nu vom descrie această transformare ci vom da numai nişte schiţe lămuritoare (vezi fig. 296 a-e); în ele este reprezentată o muchie a cubului şi sîrma care o acoperă.

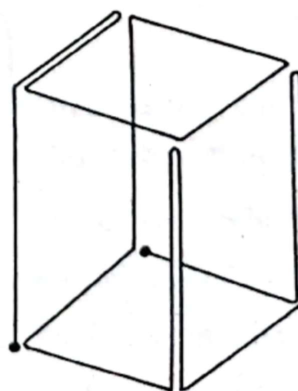


Fig. 295

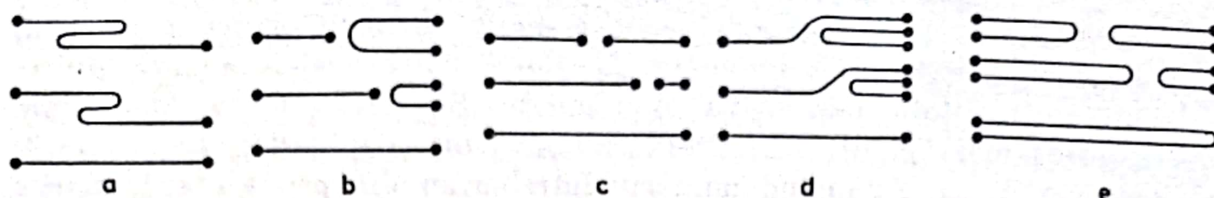


Fig. 296

M 182. *Să se demonstreze că dacă*

a) $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$, *atunci*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2},$$

b) $a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0$, *atunci*

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \geqslant \frac{4}{3},$$

c) $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ *sînt numere pozitive* ($n \geqslant 2$), *atunci*

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3 + \ldots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 + a_3 + \ldots + a_n} + \ldots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

Rezolvăm direct problema c). Vom nota suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ prin s şi numerele $s - a_i$ prin b_i. Cu aceste notaţii, trebuie să se demonstreze că

$$\frac{s-b_1}{b_1} + \frac{s-b_2}{b_2} + \ldots + \frac{s-b_n}{b_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

Această inegalitate este echivalentă cu următoarea:

$$s\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_n}\right) \geqslant \frac{n}{n-1} + n = \frac{n^2}{n-1}. \qquad (1)$$

Vom folosi acum cunoscuta relaţie dintre media aritmetică şi geometrică (media aritmetică a n numere nenegative este mai mare sau egală cu media geometrică a aceloraşi numere). Aplicînd-o rezultă că

$$\left(\frac{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_n}}{n}\right)^n \geqslant \frac{1}{b_1 b_2 \ldots b_n}$$

şi că

$$b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant \left(\frac{b_1 + b_2 + \ldots b_n}{n}\right)^n.$$

Din aceste două inegalităţi rezultă că

$$\left(\frac{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_n}}{n}\right)^n \geqslant \left(\frac{n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}\right)^n$$

şi în sfîrşit

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\geqslant\frac{n^2}{b_1+b_2+\ldots+b_n}.$$

Dar, $b_1+b_2+\ldots+b_n=ns-a_1-a_2-\ldots-a_n=(n-1)s$ de unde

$$s\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\right)\geqslant\frac{sn^2}{s(n-1)}=\frac{n^2}{n-1}.$$

Iată şi o altă rezolvare a problemei, bazată pe inegalitatea dintre mediile aritmetice şi geometrice numai a două numere.

Trebuie să demonstrăm că

$$(n-1)\left(\frac{s-b_1}{b_1}+\ldots+\frac{s-b_n}{b_n}\right)\geqslant n.$$

Observăm că $b_1+b_2+\ldots+b_n=(n-1)s$. De aceea,

$$(n-1)\frac{s-b_1}{b_1}=\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n-(n-1)b_1}{b_1}=\frac{b_2+\ldots+b_n}{b_1}-(n-2)=$$
$$=\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_1}+\ldots+\frac{b_n}{b_1}-(n-2).$$

Vom transforma de asemenea restul termenilor $(n-1)\frac{s-b_i}{b_i}$ şi adunăm toţi cei n termeni. Apoi grupăm în perechi fracţiile b_i/b_j şi b_j/b_i şi vom folosi inegalitatea: $b_i/b_j+b_j/b_i\geqslant 2$. Întrucît vor fi în total $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ perechi de indici i şi j $(1\leqslant i<j\leqslant n)$, vom obţine ca rezultat:

$$(n-1)\left(\frac{s-b_1}{b_1}+\ldots+\frac{s-b_n}{b_n}\right)\geqslant C_n^2\cdot 2-(n-2)n=n^2-n-n^2+2n=n.$$

Şi din prima şi din a doua rezolvare se vede că inegalitatea se transformă în egalitate numai pentru $b_1=\ldots=b_n$ adică pentru $a_1=\ldots a_n$.

Vom prezenta acum cîteva consideraţii cu ajutorul cărora se poate demonstra inegalitatea mediilor. Fie $c_1+c_2+\ldots+c_n=1$ (acest lucru nu limitează generalitatea). Să presupunem că pentru aceste numere inegalitatea mediilor nu este adevărată, adică

$$\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}<\sqrt[n]{c_1c_2\ldots c_n}.$$

Să presupunem că nu toate numerele c_i sînt egale şi atunci se pot găsi două — să zicem c_1 şi c_2 — astfel încît $c_1<\frac{1}{n}$ şi $c_2>\frac{1}{n}$. Să înlocuim pe c_1 prin $c_1'=\frac{1}{n}$ şi pe c_2 prin $c_2'=c_1+c_2-\frac{1}{n}$. Atunci, pentru numerele c_1', c_2', c_3, c_4, ..., c_n inegalitatea mediilor de asemenea nu este îndeplinită. Demonstraţia acestui lucru rezultă din inegalitatea $\frac{1}{n}\left(c_1+c_2-\frac{1}{n}\right)>c_1c_2$ (pentru $c_1<1/n$ şi $c_2>1/n$) care rămîne să o demonstraţi singuri.

Continuînd aceste înlocuiri, ajungem pînă la $c_1=c_2=\ldots=c_n=\frac{1}{n}$.

Rezultă că dacă inegalitatea mediilor nu este adevărată pentru o anumită

grupare de numere $c_1, c_2, \ldots, c_n$, atunci nu este adevărată nici pentru gruparea $1/n, 1/n, \ldots, 1/n$. Dar pentru acestea inegalitatea mediilor este adevărată. Contradicţia obţinută demonstrează proprietatea.

L.G. Limanov

M 183. *Să se găsească înălţimea unui trapez care are bazele egale cu a şi $b (a < b)$, unghiul dintre diagonale este egal cu 90° iar unghiul dintre prelungirile laturilor neparalele este de 45°.*

Fie în trapezul $ABCD$ (vezi fig. 297) în care $AB \parallel CD$, $AB = a$, $CD = b$, $BC = x$, $AD = y$ punctul E pe baza CD astfel încît $ABCE$ este paralelogram: $AE = x$, $DE = b - a$. Dublul ariei triunghiului ADE este

$$xy \sin 45° = (b - a)h \qquad (1)$$

unde h este înălţimea trapezului. După teorema cosinusului obţinem

$$(b - a)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 45° \qquad (2)$$

şi, în sfîrşit, cu ajutorul teoremei lui Pitagora aplicată în cele patru triunghiuri dreptunghice AOB, BOC, COD, DOA, deducem că

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \qquad (3)$$

Înlocuim acum pe (3) şi (1) în (2) şi obţinem:

$$(b - a)^2 = a^2 + b^2 - 2(b - a)h$$

deci

$$h = \frac{ab}{b - a}.$$

Unii cititori au indicat şi modul de construire a trapezului dacă a şi b sînt date (vezi fig. 298). Se arată că trapezul există dacă $\frac{b}{a} \geqslant 1 + \sqrt{2}$.

N.B. Vasiliev

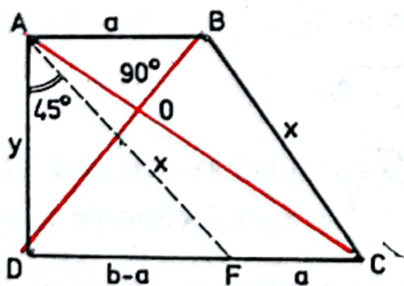


Fig. 297

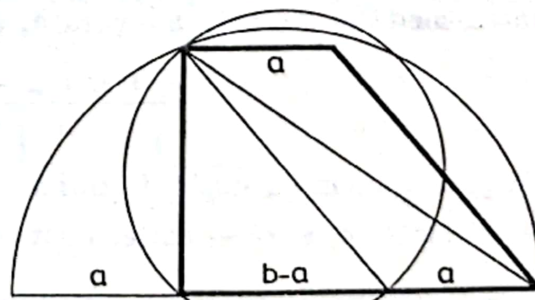


Fig. 298

M 184. *Să se demonstreze identitatea*

$$\frac{C_n^0}{x} - \frac{C_n^1}{x+1} + \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{x+n} = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

G.E. Esipenko

Vom demonstra identitatea prin metoda inducției matematice. Pentru $n = 1$ ea este adevărată, întrucît $C_1^0 = C_1^1 = 1! = 1$;

$$\frac{C_1^0}{x} - \frac{C_1^1}{x+1} = \frac{1!}{x(x+1)}.$$

Să admitem că este adevărată identitatea:

$$\frac{C_n^0}{x} - \frac{C_n^1}{x+1} + \frac{C_n^2}{x+2} + \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{x+n} = \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}. \quad (1)$$

Înlocuim în (1) pe x cu $x + 1$. Vom obține identitatea

$$\frac{C_n^0}{x+1} - \frac{C_n^1}{x+2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{C_n^{n-1}}{x+n} + (-1)^n \frac{C_n^n}{x+n+1} + \frac{n!}{(x+1)\ldots(x+n+1)} \quad (2)$$

Dacă scădem relația (2) din relația (1) și folosim formulele

$$C_n^0 = C_n^n = C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1.\ C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

pentru fiecare $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, vom obține:

$$\frac{C_{n+1}^0}{x} - \frac{C_{n+1}^1}{x+1} + \frac{C_{n+1}^2}{x+2} - \ldots + (-1)^n \frac{C_{n+1}^n}{x+n} + (-1)^{n+1} \frac{C_{n+1}^{n+1}}{x+n+1} =$$
$$= \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{(n+1)!}{x(x+1)\ldots(x+n+1)}. \quad (3)$$

Astfel pasul cerut de inducție a fost făcut, deci identitatea este demonstrată pentru orice n.

Pentru cei familiarizați cu aceste chestiuni, facem observația că în această problemă s-a obținut formula diferenței de ordinul n pentru șirul $f(x) = 1/x$:

$$\Delta^n f(x) = \frac{(-1)^n n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}.$$

Se poate demonstra o afirmație privind unicitatea identității (1). Dacă avem

$$\frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{A_k}{x+k} \quad (4)$$

unde A_k sînt coeficienți nedeterminați, atunci:

$$A_k = (-1)^k C_n^k = \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}. \quad (5)$$

Într-adevăr, este suficient să se înmulțească ambii membri ai egalității (4) prin numitorul comun $x(x+1)\ldots(x+n)$ și să se pună în egalitatea obținută $x = -k$. Atunci în membrul drept, toți termenii vor fi nuli cu excepția unuia: $A_k(-k)(-k+1)\ldots(-1)\cdot 1\cdot 2\ldots(n-k) = A_k(-1)^k k!(n-k)!$ și ajungem la (5).

M 185. *Pe un caftan de arie 1 se pun 5 petece fiecare avînd aria de cel puțin 1/2. Să se demonstreze că există două petece care se suprapun pe o porțiune de arie cel puțin 1/5.*

E.B. Dînkin

Vom nota prin x_k aria acelei părți din caftan acoperită de exact k petece ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$). Din ipoteză rezultă că aria caftanului este 1 iar suma

ariilor petecelor este cel puţin 5/2 şi atunci:

$$S_0 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1,$$
$$S_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \geqslant \frac{5}{2}.$$

Suma ariilor tuturor celor 10 suprapuneri de perechi de petece va fi egală cu

$$S_2 = x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 \geqslant -3x_0 - x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = \\ = 2S_1 - 3S_0 \geqslant 2;$$

de aceea cel puţin una dintre cele 10 suprapuneri de petece trebuie să aibă aria cel puţin $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ (egalitatea este posibilă dacă $x_0 = x_1 = x_4 = x_5 = 0$ şi toate cele 10 intersecţii sînt de arii egale).

M 186. *Să se găsească toate soluţiile ecuaţiei*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

în numere întregi diferite de 1.

V. Slepcenko (elev cl. a X-a)

Dacă k este un număr întreg diferit de 1, atunci $1/k < 1/2$. De aici rezultă că nici unul dintre numerele x, y, z nu poate fi negativ; dacă de exemplu, $x < 0$, atunci

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Astfel că x, y, z sînt numere naturale, nenule.

Putem considera că $1 < x \leqslant y \leqslant z$; celelalte soluţii se obţin prin permutări. Cu alte cuvinte, este suficient să se găsească acele soluţii pentru care

$$1 > \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{z}.$$

Este clar că x nu poate fi mai mare decît 3; dacă $x > 3$, atunci

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

De aceea sînt posibile numai două cazuri:

1) $x = 3$ (şi atunci, evident $y = z = 3$);

2) $x = 2$. În acest caz trebuie ca $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$.

În acest caz y nu poate fi mai mare decît 4, altfel

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

De aceea, sau $y = 4$ (şi atunci $z = 4$) sau $y = 3$ (şi atunci $z = 6$). Astfel ecuaţia are în total 10 soluţii în numere naturale diferite de 1: şase se obţin prin permutarea numerelor (2, 3, 6), trei prin permutarea numerelor (2, 4, 4) şi încă una (3, 3, 3).

M 187. *În plan se dau două puncte A și B. Să se găsească locul geometric al celui de al treilea vîrf C al triunghiului ABC, astfel ca:*

a) înălțimea AA' să fie congruentă cu latura BC;
b) mediana AA_1 să fie congruentă cu latura AC;
c) mediana AA_1 să fie congruentă cu latura BC;
d) înălțimea CC' să fie congruentă cu mediana BB_1;
e) înălțimea BB' să fie congruentă cu mediana CC_1.

M.A. Kvantov

a) Locul geometric căutat va fi o figură simetrică față de dreapta AB; de aceea este suficient să se cerceteze punctele unuia dintre cele două semiplane în care dreapta AB împarte planul.

Vom construi punctul D astfel încît $DM \perp AB$ și $DB = BA$. În semiplanul în care lucrăm, un astfel de punct D este unic. Dacă înălțimea AA' este congruentă cu CB, atunci (fig. 299)

$$\triangle AA'B = \triangle CBD$$

(unghiurile $A'AB$ și CBD sînt congruente, întrucît ambele sînt ascuțite, $AA' \perp BC$ și $AB \perp BD$). Astfel,

$$\sphericalangle BCD = 90° \qquad (1)$$

Fig. 299

Fig. 300

Reciproc, dacă pentru un anumit punct C, unghiul BCD este drept, atunci evident că $\triangle AA'B = \triangle CBD$ și $AA' = BC$. Astfel, este suficient să se găsească mulțimea punctelor C pentru care este îndeplinită condiția (1) (B și D sînt puncte fixe). Această mulțime — așa cum se știe — este cercul de diametru BD.

b) Fie E un punct pe prelungirea medianei AA_1 astfel încît $A_1E = AA_1$. Atunci $ACEB$ este un paralelogram (fig. 300). Condiția $AA_1 = AC$ este echivalentă cu:

$$AE = 2BE. \qquad (2)$$

Vom folosi teorema: Dacă A și B sînt două puncte din plan, atunci mulțimea punctelor E din plan pentru care $\frac{AE}{BE} = k$ (k este un număr pozitiv dat, diferit de 1), este un cerc de diametru E_1E_2, unde E_1 și E_2 sînt punctele dreptei AB pentru care $\frac{AE_1}{BE_1} = k$ și $\frac{AE_2}{BE_2} = k$ (E_1 este situat în interiorul segmentului AB, E_2 în exterior).

Din această teoremă rezultă că mulţimea punctelor E este un cerc de diametru E_1E_2, iar E_1 şi E_2 fiind puncte pe dreapta AB astfel încît $AE_1/BE_1 = AE_2/BE_2 = 2$ (unul interior altul exterior) şi pentru ca să se obţină mulţimea punctelor C trebuie să se facă o translaţie a acestui cerc cu vectorul $\overrightarrow{BA}$ (căci $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EC}$).

A mai rămas să se demonstreze teorema. Pur geometric, demonstraţia poate fi făcută astfel: dacă $AE/BE = k = AE_1 / BE_1 = AE_2 / BE_2$ atunci EE_1 şi EE_2 sînt bisectoarele unghiurilor dintre dreptele AE şi BE; de aceea $\sphericalangle E_1EE_2 = 90°$ aşa că E este situat pe un cerc de diametru E_1E_2. Reciproc, dacă O este centrul acestui cerc, atunci pentru orice punct E al său avem $EO^2 = AO \cdot BO$ adică triunghiurile AOE şi EOB sînt asemenea şi $EA / EB = AO / OE = OE/OB = k$.

c) Condiţia $AA_1 = 2\ BA_1$ este echivalentă cu

$$AA_1 = 2\ BA_1. \tag{3}$$

Astfel locul geometric al punctului A_1 este cercul care s-a folosit şi în rezolvarea punctului precedent (fig. 301) numai că nu mai trebuie translatat ci supus la o omotetie de coeficient 2 şi cu centrul în punctul B (căci $BC = 2\ BA_1$).

d) Coborîm din punctul B_1 — mijlocul laturei AC — o perpendiculară B_1K pe dreapta AB. Desigur $CC_1 = 2 \cdot B_1K$, de aceea condiţia $CC' = BB_1$ este echivalentă cu condiţia $BB_1 = 2 \cdot B_1K$ (cateta este congruentă cu jumătatea ipotenuzei) (fig. 302). Prin urmare $\sphericalangle B_1BK = 30°$. De aceea, locul geometric al punctelor B_1 este format din patru semidrepte care pleacă din punctele B şi formează cu segmentul AB unghiuri de 30° şi 150°. Mulţimea punctelor C se obţine din acestea printr-o omotetie de coeficient 2 şi de centru A.

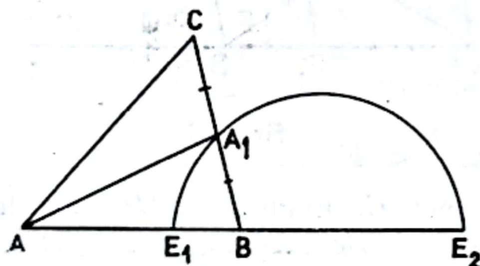


Fig. 301

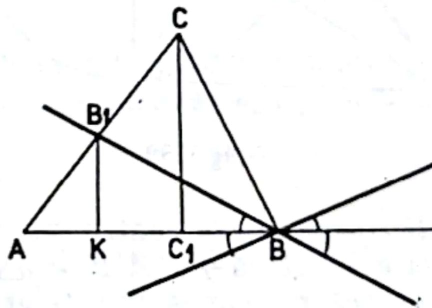


Fig. 302

e) Fie L proiecţia punctului C_1 (mijlocul segmentului AB) pe dreapta AC. Întrucît, (fig. 303) $BB' = CC_1$, rezultă că $2\ C_1L = CC_1$ şi $\sphericalangle LCC_1 = 30°$. Prin urmare $\sphericalangle ACC_1$ este de 30° sau 150° şi locul geometric al punctului C va fi o pereche de cercuri care trec prin punctele A şi C_1.

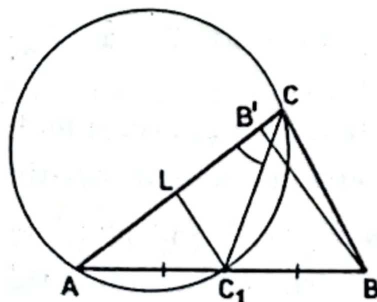


Fig. 303

În figura 304 sînt reprezentate răspunsurile la problemă, punctele $a - e$. Punctele C situate chiar pe dreapta AB le-am exclus din mulţimile respective de puncte (ele conduc la triunghiuri ABC „degenerate"); mai sus n-am menţionat acest lucru de fiecare dată.

N.B. Vasiliev

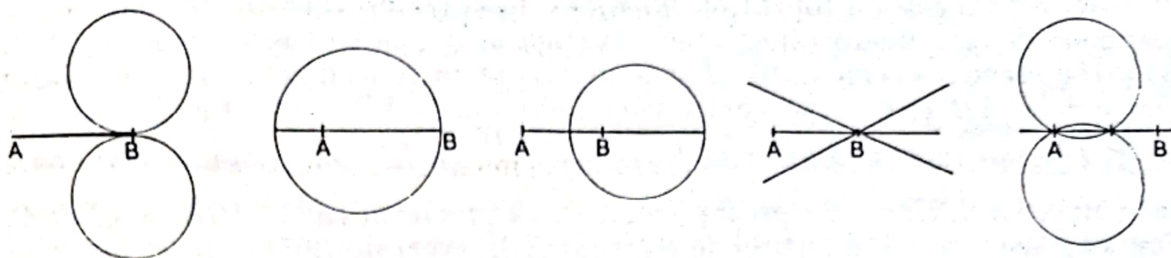


Fig. 304

M 188. *Între unele dintre cele 2n oraşe, s-au stabilit legături aeriene şi fiecare oraş este legat cu cel puţin n alte oraşe (prin curse fără escală). Să se demonstreze că chiar dacă se suspendă oricare n — 1 curse, tot se poate ajunge din orice oraş în oricare altul cu avionul (cu transbordări). Să se indice toate cazurile în care această legătură se întrerupe dacă se suspendă n curse.*

A.K. Kelmans

Să presupunem că după suspendarea anumitor t curse, legătura se întrerupe. Atunci înseamnă că există k oraşe, unde $k < n$, astfel încît din ele nu se poate ajunge în celelalte $2n - k$ oraşe. Într-adevăr, să considerăm un anumit oraş A şi toate oraşele în care se poate ajunge din el (eventual cu transbordări). Dacă acestea (împreună cu A) nu sînt mai multe decît n, atunci cele k oraşe sînt găsite. Dacă ele sînt în număr de m şi $m > n$, atunci din ele nu se poate ajunge în celelalte $2n - m$ oraşe şi din acestea $2n - m < n$ oraşe nu se poate ajunge în cele m oraşe rămase. Aşa că, în orice caz se găsesc k oraşe, unde $k \leqslant n$ din care nu se poate ajunge în celelalte $2n - k$ oraşe. Iniţial, fiecare dintre aceste oraşe a fost legat prin linii aeriene cu cel puţin n oraşe, de aceea cel puţin $n + 1 - k$ linii l-au legat nu cu cele k oraşe şi prin urmare au fost suspendate. Rezultă că în total au fost suspendate cel puţin $k(n + 1 - k)$ curse. Dar $k(n + 1 - k) > n - 1$ pentru $k = 1, 2, \ldots, n$. Prin urmare dacă se suspendă $n - 1$ curse, legătura nu se întrerupe.

Să răspundem acum la a doua întrebare a problemei. Observăm că $k(n + 1 - k) = n$ numai pentru $k = 1$ şi $k = n$. Dacă $k = 1$, înseamnă că un anumit oraş a fost legat prin curse cu exact n oraşe şi toate aceste curse au fost suspendate. Dacă $k = n$, înseamnă că anumite n oraşe $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt legate două cîte două prin linii aeriene, celelalte n oraşe rămase $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ de asemenea sînt legate două cîte două prin linii aeriene şi mai există n linii care unesc oraşele A_1 cu A_1', A_2 cu A_2', ..., A_n cu A_n'. În figura 305 se văd schemele liniilor aeriene pentru $n = 2$ şi $n = 3$.

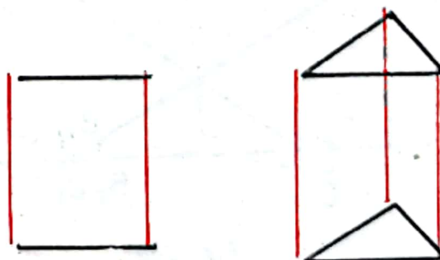


Fig. 305

L.G. Limanov

M 189. *Trei segmente AB, EF, CD trec prin acelaşi punct O iar punctul E este situat pe segmentul AC şi punctul F pe segmentul BD. Să se demonstreze că EF este mai mic decît cel puţin unul dintre segmentele AB sau CD (vezi fig. 306).*

D. Iu. Grigoriev

Ne vom folosi de faptul că lungimea bisectoarei dintr-un triunghi nu e mai mare decît semisuma lungimilor laturilor dintre care pleacă (demonstrați!). Să presupunem că segmentul EF este mai mare cu Δ decît cel mai mare dintre segmentele AB și CD, pe care-l vom nota max (AB, CD). Fie $\measuredangle AOE \neq \neq \measuredangle EOC$ — în caz contrar, $EF \leqslant \frac{AB + CD}{2}$ și EF nu poate fi mai mare decît max (AB, CD). Să presupunem, ca să precizăm că $\measuredangle AOE > \measuredangle EOC$. Vom construi atunci un astfel de segment E_1E_1 (vezi fig. 307) încît $\measuredangle E_1OE = = \measuredangle EOC$. E clar că punctul E_1 aparține segmentul AC, iar punctul F_1, segmentului BD. $EF \leqslant \frac{CD + E_1F_1}{2}$ de aceea, E_1F_1 este cu cel puțin 2Δ mai lung decît max (AB, CD). Astfel, am reușit să trecem de la un segment„ mai mare cu Δ“ la un segment „mai mare cu 2Δ“, unde Δ este un anumit număr pozitiv. Repetînd această construcție de k ori, ajungem la segmentul E_kF_k care este mai mare decît max (AB, CD) ce cel puțin $2^k\Delta$. Alegînd pe k suficient de mare, putem să facem lungimea segmentului E_kF_k mai mare decît a sumei $AB + CD$ ceea ce este imposibil. Contradicția obținută, arată că EF nu poate fi mai mare decît max (AB, CD). Problema este rezolvată.

Iată altă rezolvare a acestei probleme. Vom duce prin punctele E și F drepte perpendiculare pe EF. Prelungim segmentele OA, OB, OC, OD pînă la intersecția cu aceste drepte și facem notațiile din figura 308. Presupunem că punctul A este situat în interiorul benzii dintre drepte și punctul C în afara

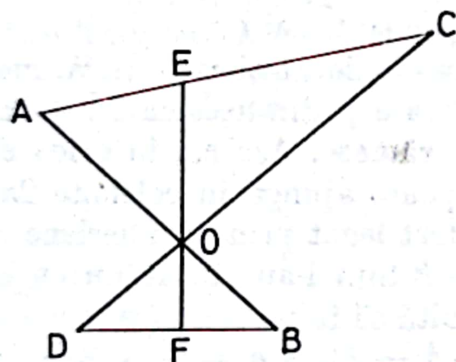


Fig. 306

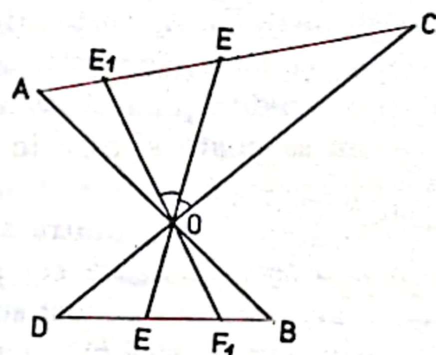


Fig. 307

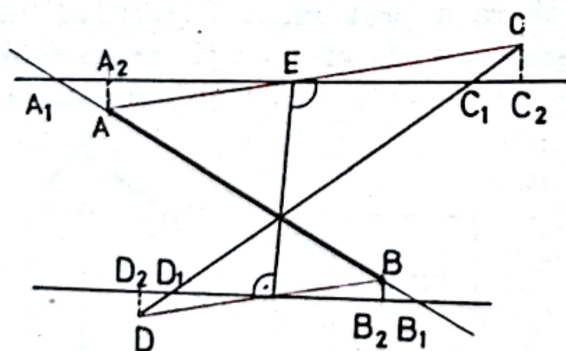


Fig. 308

ei; atunci D trebuie să fie situat în interiorul benzii (altfel este evident că $CD > EF$) și B în exterior. Din inegalitățile

$$\frac{AA_2}{CC_2} = \frac{A_2E}{EC_2} \leqslant \frac{A_1E}{EC_1} = \frac{B_1F}{FD_1} \leqslant \frac{B_2F}{FD_2} = \frac{BB_2}{DD_2}$$

rezultă că sau $AA_2 \leqslant BB_2$ (și atunci $AB > EF$) sau $CC_2 \geqslant DD_2$ (și atunci $CD > EF$).

D. Iu. Grigoriev

M 190. *Într-un plan sînt date două drepte a și b. În punctul A_1 situat pe dreapta a, la o distanță mai mică decît 1 la dreapta b, se găsește un purece. Apoi purecele sare pe rînd în punctele B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, ..., conducîndu-se după următoarele reguli;*

1) punctele A_1, A_2, A_3, ... sînt situate pe dreapta a, iar punctele B_1, B_2, B_3, ..., pe dreapta b;

2) $A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = B_2A_3 = A_3B_3 = \ldots = 1$;

3) punctul A_n *nu coincide cu* A_{n+1} *decît în cazul în care* $A_nB_n \perp a$ *și analog,* B_n *coincide cu* B_{n+1} *numai dacă* $B_nA_{n+1} \perp b$ *(se vede ușor că prin condițiile 1) — 3) șirul de sărituri, începînd cu* B_1A_2 *este unic determinat).*

Să se demonstreze că dacă unghiul dintre dreptele a și b se exprimă printr-un număr irațional de grade, atunci drumul purecelui va fi periodic, adică la un moment dat el ajunge în punctul inițial A_1 *și apoi va trece prin aceleași puncte* B_2, A_2, B_2, *ca și la începutul drumului și dacă este număr irațional, atunci purecele nu va trece prin nici un punct mai mult de două ori.*

Este interesant de stabilit nu numai dacă drumul purecelui este sau nu „ciclic“, dar și să stabilim modul în care este format șirul de puncte

$$A_1, B_1, A_2, B_2 \ldots, A_n, \quad B_n \ldots \tag{1}$$

și alte chestiuni colaterale.

Mai jos vom spune adesea în loc de cuvîntul „purece“, cuvîntul „punct“.

Traiectoria purecelui poate fi reprezentată printr-un șir de versori $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, ..., (fig. 309). (2)

Să observăm că dacă știm vectorul $\vec{u} = \overrightarrow{A_nB_n}$, atunci putem determina unde sînt situate punctele A_n și B_n. Într-adevăr, este adevărată următoarea lemă:

Fie a și b două drepte care se intersectează. Pentru orice vector $\vec{u}$ din planul lor se pot găsi două puncte A pe dreapta a și B pe dreapta b astfel încît vectorul $\overrightarrow{AB}$ să fie echipolent cu vectorul dat $\vec{u}$. Punctele A și B sînt unic determinate.

D e m o n s t r a ț i e. (fig. 310). Dacă originea vectorului echipolent cu $\vec{u}$ o luăm pe dreapta a, atunci extremitatea sa se va găsi pe dreapta a' obținută din a printr-o translație de vector $\vec{u}$ (dreapta punctată din figura 310). De aceea, punctul B trebuie să se găsească la intersecția dintre dreptele a' și b. Apoi punctul A se determină ușor.

Vom lua în plan punctul O și vom construi vectori echipolenți cu cei din șirul (2) avînd originea în O. Vom nota acești vectori astfel:

$$\overrightarrow{OC_1}, \overrightarrow{OD_1}, \overrightarrow{OC_2}, \overrightarrow{OD_2}, \ldots\ldots \tag{3}$$

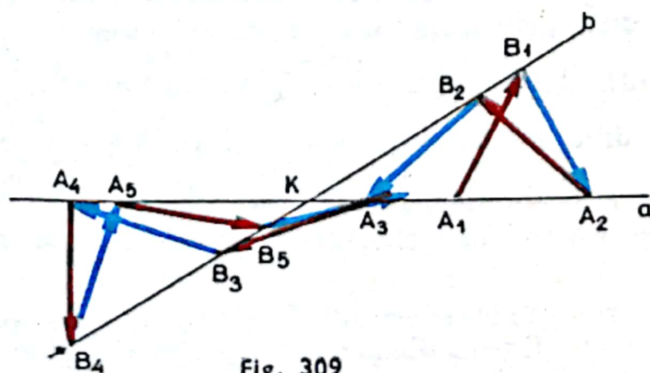


Fig. 309

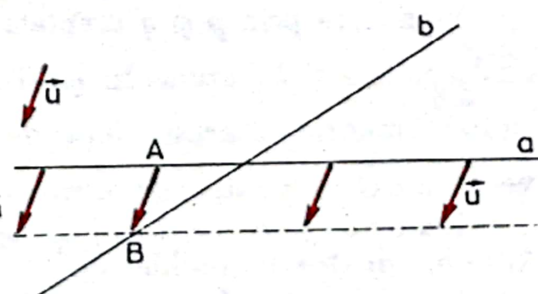


Fig. 310

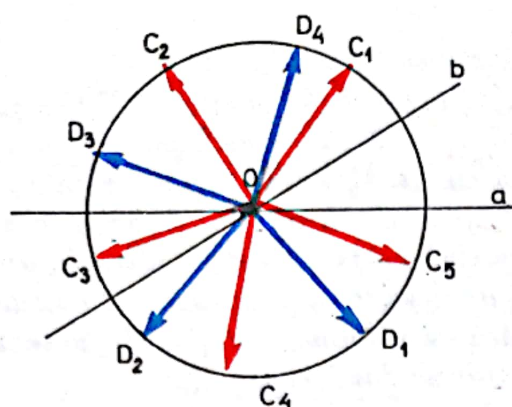


Fig. 311

Din lema demonstrată mai sus rezultă că dacă ştim şirul (3), atunci putem găsi şirul de puncte (1); de exemplu, ştiind pe $\overrightarrow{OC_n}$ putem găsi şi pe A_n şi pe B_n.

În figura 311 sînt reprezentaţi vectorii corespunzători săriturilor din figura 309. Se observă că vectorii $\overrightarrow{OC_n}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) formează între ei unghiuri congruente. Se arată că acesta este un lucru general adevărat pentru orice şir de sărituri. Îl formulăm sub forma unei teoreme:

T e o r e m ă. Dacă unghiul dintre dreptele a şi b este γ, atunci unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{OC_n}$ şi $\overrightarrow{OC_{n+1}}$ este 2γ.

Aceasta este principala consideraţie pentru rezolvarea problemei. Teorema poate fi demonstrată folosindu-ne de faptul că două segmente din linia frîntă determinată de (2) sînt laturi congruente ale unui triunghi isoscel iar baza acestui triunghi este situată cînd pe dreapta a cînd pe dreapta b. Principala dificultate a problemei apare datorită faptului că segmentele liniei frînte pot să fie situate diferit faţă de cele două drepte. De exemplu, ca să se demonstreze teorema pentru $\gamma = 60°$ trebuie să se ia în considerare 10 cazuri (reprezentate în figura 312) celelalte se obţin din acestea printr-o simetrie faţă de punctul de intersecţie a dreptelor a şi b. Vom proceda altfel: folosind noţiunile de „transformare" şi de „produs de transformări" vom da o demonstraţie generală care va cuprinde deodată toate cazurile.

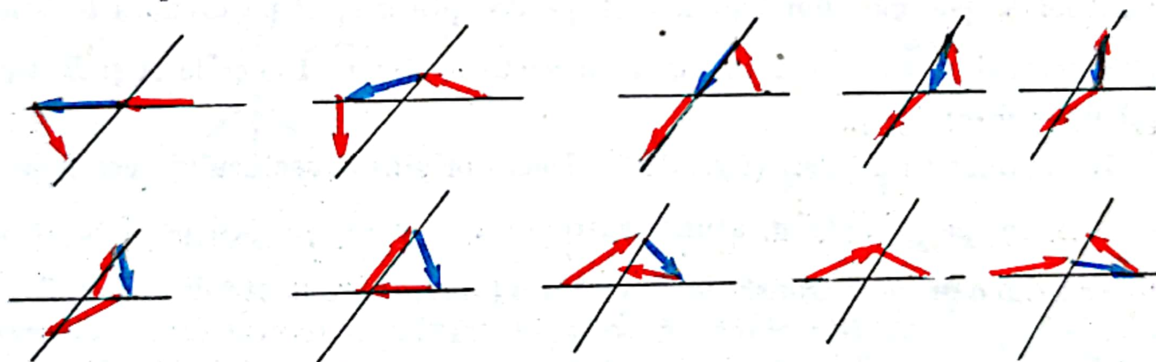


Fig. 312

Să comparăm încă o dată figurile 309 şi 311. Extragem din ele fragmentele formate din două segmente consecutive (care formează triunghiurile isoscele de care a fost vorba mai sus; figura 313 a şi b, figura 314 a şi b). Privind la aceste desene, se formulează uşor regula după care se construieşte şirul (3).

Vom nota prin p şi q dreptele duse prin punctul O şi paralele respectiv cu dreptele a şi b; atunci în şirul (3), după vectorul $\overrightarrow{OC_n}$ va urma vectorul $\overrightarrow{OD}$ simetric cu acesta faţă de dreapta p; după vectorul $\overrightarrow{OD_n}$ va urma vectorul $\overrightarrow{OC_{n+1}}$ simetric cu acesta faţă de dreapta q ($n = 1, 2, \ldots$).

E x e r c i ţ i u. Verificaţi că această regulă este echivalentă cu condiţiile 1) — 3) din textul problemei.

E x e r c i ţ i u. Demonstraţi că dacă punctele şirului (1) ajung în punctul A_1 de mai mult de două ori, atunci şirul va fi periodic şi în acest caz un anumit

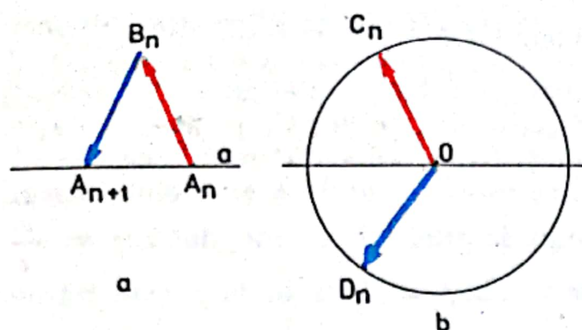


Fig. 313

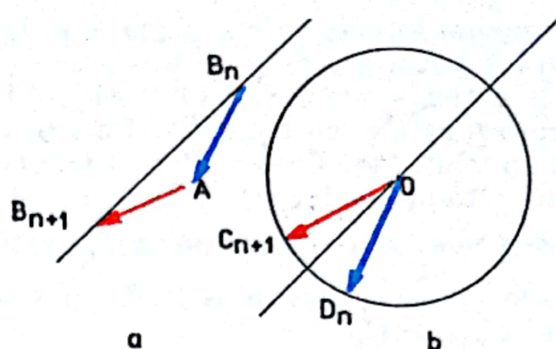


Fig. 314

punct C_n va coincide cu C_1. Dați un exemplu în care șirul ajunge în punctul A_1 de două ori: A_2 coincide cu A_1 dar B_2 nu coincide cu B_1. Reformulăm acum problema M 190, dar nu vom vorbi de transformările vectorilor $\overrightarrow{OC_n}$ și $\overrightarrow{OD_n}$ ci de transformările extremităților lor care sînt puncte situate pe un cerc de rază 1.

Fie p și q două drepte duse prin punctul O. Vom nota prin S_q simetria față de dreapta p și prin S_q simetria față de dreapta q. (Putem considera aceste transformări extinse la întreg planul deși în continuare vom avea de a face numai cu transformări ale cercului dat în el însuși). Fie C_1 un punct oarecare situat la distanța 1 de O și

$$D_1, C_2, D_2, C_3, D_3, \ldots, \tag{4}$$

șirul determinat prin condițiile

$$D_n = S_p(C_n), \quad C_{n+1} = S_q(D_n) \tag{5}$$

(vezi fig. 315). Trebuie să demonstrăm că punctul C_n, pentru un anumit n coincide cu C_1, atunci și numai atunci cînd unghiul dintre dreptele p și q are un număr rațional de grade.

Astfel problema săriturilor pe două drepte s-a redus la problema săriturilor pe un cerc. Iar teorema care trebuie demonstrată în primul rînd afirmă că $\cup\, C_nC_{n+1} = 2\gamma$ unde γ este unghiul dintre p și q. Regula (5) de trecere de la un punct la altul se simplifică și mai mult dacă considerăm șirul

$$C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots. \tag{6}$$

în care

$$C_{n+1} = S_q(S_p(C_n)) \tag{7}$$

unde asupra punctului C_n se aplică întîi simetria S_p și apoi S_q, deci C_{n+1} se obține din C_n aplicîndu-i acestuia produsul de simetrii $S_q o S_p$. Se știe că produsul a două simetrii este echivalent cu o rotație de centru, punctul de intersecție a celor două axe de simetrie și de unghi congruent cu dublul

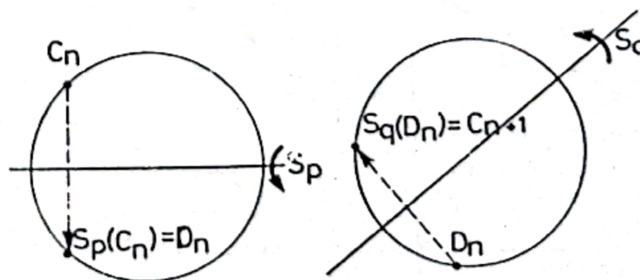


Fig. 315

unghiului format de cele două axe. De aici rezultă direct afirmaţia teoremei $\cup C_nC_{n+1} = 2\gamma$.

Astfel, am lămurit că în şirul (6) fiecare punct se obţine din cel precedent printr-o rotaţie de unghi 2γ. De aceea C_{n+1} se obţine din C_1 printr-o rotaţie de „unghi" $2n\gamma$. Pentru ca punctele C_{n+1} şi C_1 să coincidă trebuie ca $2n\gamma$ să fie un multiplu întreg de $360°$, adică $2n\gamma = 360°k$ unde k şi n sînt întregi deci γ se exprimă printr-un număr raţional de grade. Reciproc, dacă $\gamma = \frac{s}{t}$ grade atunci pentru $n = 180°t$ vom obţine $2n\gamma = 360°s$ unde s este întreg deci $C_{n+1} = C_1$.

N.B. Vasiliev

M 191. *Într-un plan sînt date punctele A şi B şi dreapta d care trece prin punctul A şi nu trece prin punctul B. Prin punctele A şi B se duce un cerc arbitrar. Fie O centrul său şi C punctul de intersecţie cu dreapta d, diferit de A. Să se găsească locul geometric al mijloacelor segmentelor OC.*

P. Paramonov (elev cl. a IX-a)

Vom găsi pe rînd locurile geometrice ale punctelor (toate vor fi linii drepte, vezi fig. 316):

O, centrele cercurilor, loc geometric notat prin m_1;

K, mijloacele segmentelor OA, notat prin m_2;

P, mijloacele înălţimilor OL ale triunghiurilor isoscele AOC, notat prin m_3;

M, mijloacele segmentelor OC, notat prin m_4.

Mulţimea de puncte m_1, după cum bine se ştie, este o dreaptă perpendiculară pe segmentul AB dusă prin mijlocul său. Vom nota prin D şi E punctele de intersecţie a dreptei m_1 respectiv cu dreapta d şi cu perpendiculara dusă pe dreapta d în A (cazul în care dreptele m_1 şi d sînt paralele, este foarte simplu dar trebuie considerat separat); notăm prin G mijlocul segmentului AE, prin F şi H acele puncte ale dreptei d astfel încît $AF = FD = DH$ (fig. 316). Acum trebuie demonstrate trei afirmaţii:

1) Locul geometric al punctelor care sînt mijloacele unor segmente cu un capăt A fix, iar cu celălalt pe o dreaptă DE este o dreaptă (FG din fig. 317).

2) Locul geometric al mijloacelor segmentelor paralele cu o direcţie dată AE şi cu capetele pe două drepte date (ED şi AD) este o dreaptă (DG; fig. 318).

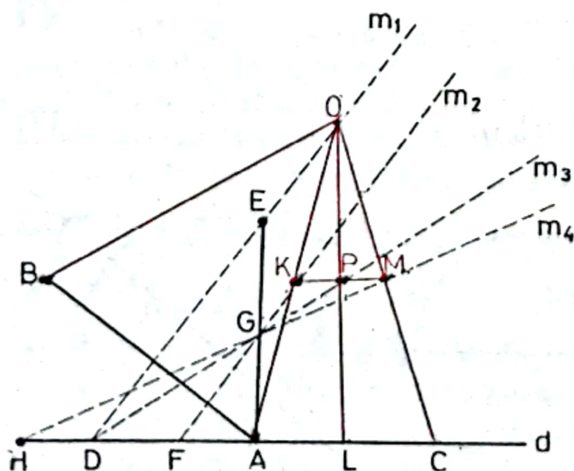


Fig. 316

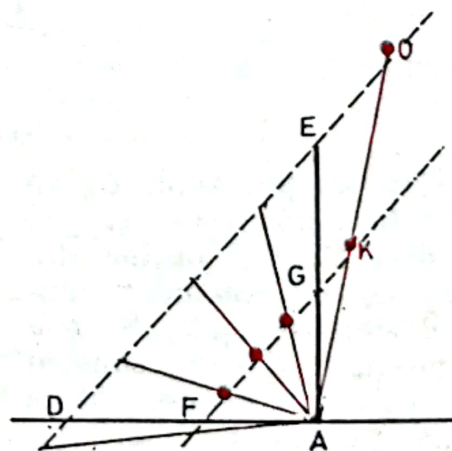


Fig. 317

3) Locul geometric al extremităţilor unor segmente paralele cu dreapta dată d care au celelalte extremităţi şi mijloacele pe două drepte date (FG şi DG) este o dreaptă (HG din fig. 319).

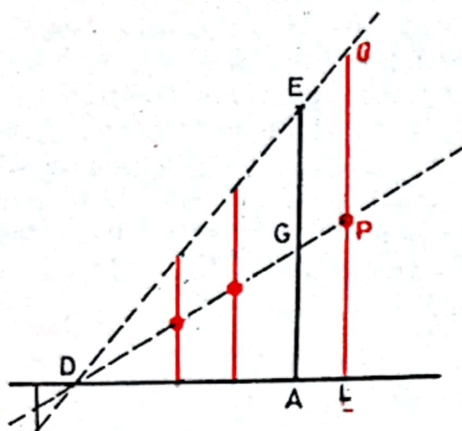


Fig 318

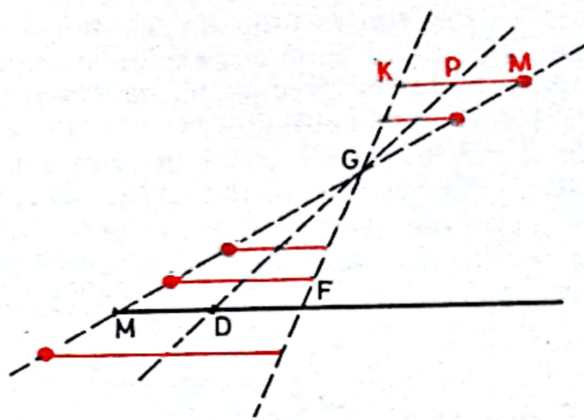


Fig. 319

Toate aceste afirmaţii se demonstrează uşor şi aproape la fel. Vom demonstra de exemplu afirmaţia 3). În primul rînd, este clar că orice punct M de pe dreapta HG satisface condiţia cerută: dacă prin punctul M se duce o dreaptă paralelă cu d şi notăm prin K şi P punctele sale de intersecţie cu dreptele FG şi DG, atunci P va fi mijlocul segmentului KM (aceasta se demonstrează uşor cu ajutorul asemănării, folosind egalitatea $HD = GF$). În al doilea rînd, pe orice dreaptă paralelă cu d se găseşte numai un punct al mulţimii căutate. De aceea alte puncte (care nu sînt situate pe dreapta HG) în această mulţime nu pot să fie.

Celelalte demonstraţii, efectuaţi-le singuri.

Consideraţi de asemenea cazul în care $AB \perp d$; în acest caz toate cele trei locuri geometrice m_2, m_3, m_4 se confundă într-o dreaptă paralelă cu d şi care împarte segmentul AB în raportul 1:3.

M 192. *Se dau numerele 1, 2, 3, ..., 1 000. Să se găsească cel mai mare număr natural m care are următoarea proprietate: dacă se vor elimina oricare m numere dintre cele date, atunci printre cele $1000 - m$ rămase se găsesc două dintre care unul se divide la celălalt.*

Vom demonstra că cel mai mare număr m este 499. Mai înainte, să arătăm că nici un număr n mai mare sau egal cu 500 nu are proprietatea necesară. Într-adevăr, dacă $m \geqslant 500$, atunci eliminînd primele m numere (de la 1 la m) rămînem cu numerele de la $m + 1 \geqslant 501$ la 1 000 printre care evident că nu este nici unul care să se dividă la altul.

Acum vom demonstra că $m = 499$ are proprietatea cerută. Cu alte cuvinte vom demonstra că printre oricare 501 numere luate de la 1 la 1 000 se vor găsi două dintre care unul să se dividă la celălalt.

Vom pune în corespondenţă fiecărui număr dintre cele 501 cel mai mare divizor al său impar; numărul $2^k(2n + 1)$ este pus în corespondenţă cu numărul $2n + 1$. Numere impare mai mici decît 1 000 sînt în total 500. Prin urmare la anumite două numere din cele 501 le va corespunde unul şi acelaşi număr impar. Dintre aceste două numere cel mai mare se obţine, în mod obligator, din cel mai mic înmulţit cu un factor putere a lui 2.

M 193. *Să se demonstreze că suma ariilor celor cinci triunghiuri formate de cîte o pereche de laturi şi o diagonală ale unui pentagon convex (vezi fig. 320) este mai mare decît aria întregului pentagon.*

N.B. Vasiliev

Vom da una dintre soluţiile cele mai scurte datorate lui A. Makarîcev (Lvov). Vom demonstra că suma ariilor anumitor patru triunghiuri dintre cele menţionate în textul problemei, este mai mare decît aria pentagonului.

Fie dat un pentagon convex oarecare. Vom nota vîrfurile sale prin literele A, B, C, D, E astfel încît aria triunghiului ABC să fie cea mai mică dintre ariile triunghiurilor ABC, BCD, CDE, DEA şi EAB (fig. 320). Fie F punctul de intersecţie dintre AD şi EC. Întrucît punctul F este situat pe segmentul EC, aria S_{ABF} este cuprinsă între S_{ABE} şi S_{ABC} (fig. 321). Dar ştim că $S_{ABC} \leqslant S_{ABE}$. De aceea, $S_{ABF} \leqslant S_{ABE}$.

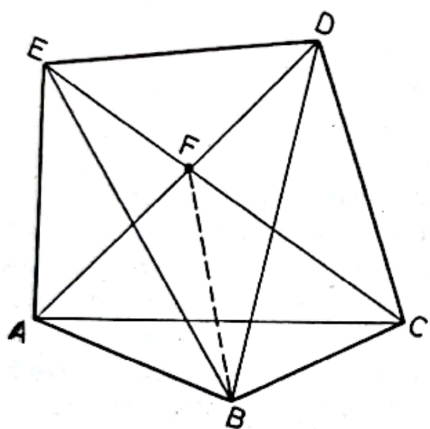


Fig. 320

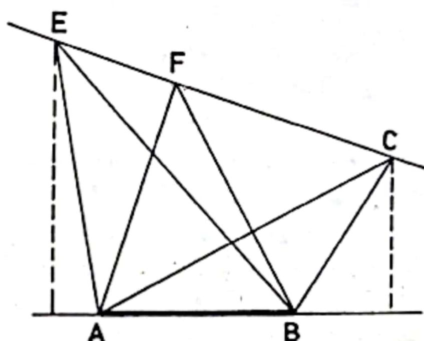


Fig. 321

În mod analog, întrucît punctul F este situat pe segmentul AD şi $S_{ABC} \leqslant S_{BCD}$, rezultă că $S_{BCF} \leqslant S_{BCD}$.

Dar triunghiurile AED, EDC, ABF şi BCF acoperă pentagonul (porţiunea EFD de două ori). De aceea suma ariilor lor este mai mare decît S_{ABCDE}. Cu atît mai mult

$$S_{ABE} + S_{AED} + S_{EDC} + S_{BCD} \geqslant S_{ABCDE}.$$

Afirmaţia este demonstrată.

Exemplul dat în figura 322 arată că raportul dintre ariile celor cinci triunghiuri şi aria pentagonului poate fi foarte aproape de 1. Nu e greu de văzut că acest raport nu este mai mare decît 2. Figura 323 arată că el poate fi făcut oricît de aproape de 2.

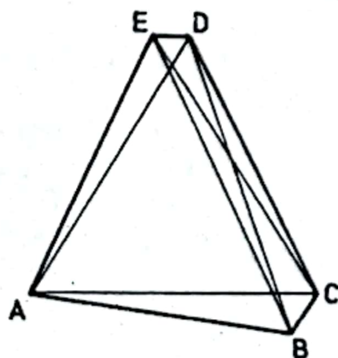


Fig. 322

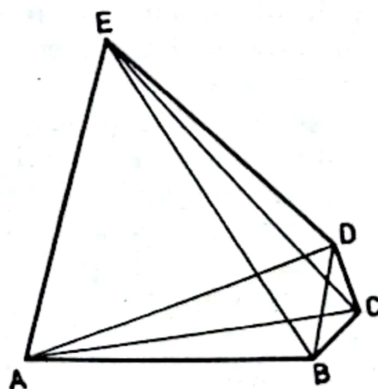


Fig. 323

M 194. *Se dau două numere naturale prime între ele a şi b. Se ştie că orice număr întreg poate fi scris sub forma $ax + by$, unde x şi y sînt numere întregi. Considerăm mulţimea M a tuturor numerelor care pot fi reprezentate sub forma $ax + by$ unde x şi y sînt numere naturale.*

a) Care este cel mai mare număr c care nu aparţine mulţimii M?

b) Să se demonstreze că dintre două numere n şi $c - n$ (unde n este orice număr întreg) unul aparţine mulţimii M, iar celălalt nu. (În figura 324 pentru $a = 5$ şi $b = 3$, punctele de coordonate întregi care aparţin mulţimii M sînt colorate.)

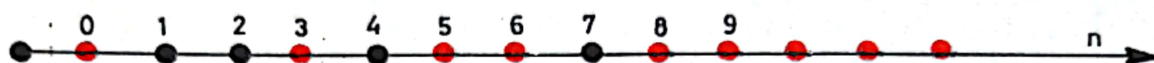


Fig. 324

Vom desena în plan sistemul de coordonate *Oxy* şi vom reformula problema în limbaj geometric. Fiecare pereche de numere întregi (x, y) va fi numită „punct întreg" şi va fi reprezentată cu cerculeţ dacă ambele sale coordonate sînt numere naturale ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) şi cu punct negru dacă cel puţin una dintre coordonate va fi negativă (fig. 325).

Numerele naturale prime între ele *a* şi *b* le considerăm date (în fig. 324, $a = 5$ şi $b = 3$). Pentru fiecare *n*, ecuaţia $ax + by = n$ defineşte, aşa cum se ştie, o dreaptă. O vom nota prin d_n. Desigur, toate dreptele d_n sînt paralele între ele. Fie *n* un număr întreg. Vom considera dreapta d_n trasată cu roşu dacă trece cel puţin printr-un punct reprezentat printr-un cerculeţ şi cu negru în caz contrar (vom demonstra mai jos că orice dreaptă d_n trece printr-un punct întreg). Trebuie să stabilim care este cel mai mare număr *c* căruia îi corespunde o dreaptă neagră d_c şi să demonstrăm că atunci dintre două drepte d_n şi d_{c-n} una este desenată cu roşu şi una este cu negru.

Vom folosi în rezolvare transformările planului în el însuşi care transformă mulţimea punctelor întregi în ea însăşi şi care transformă orice dreaptă d_n în ea însăşi sau în alta d_n, din familie. Aceste transformări sînt în primul rînd translaţiile de orice vector (p, q) cu *p* şi *q* întregi:

$$(x, y) \rightarrow (p + x, y + q)$$

şi în al doilea rînd rotaţiile cu 180° (sau, ceea ce este acelaşi lucru, simetria faţă de un punct) cu orice centru $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$ unde *p* şi *q* sînt întregi:

$$(x, y) \rightarrow (p - x, q - y).$$

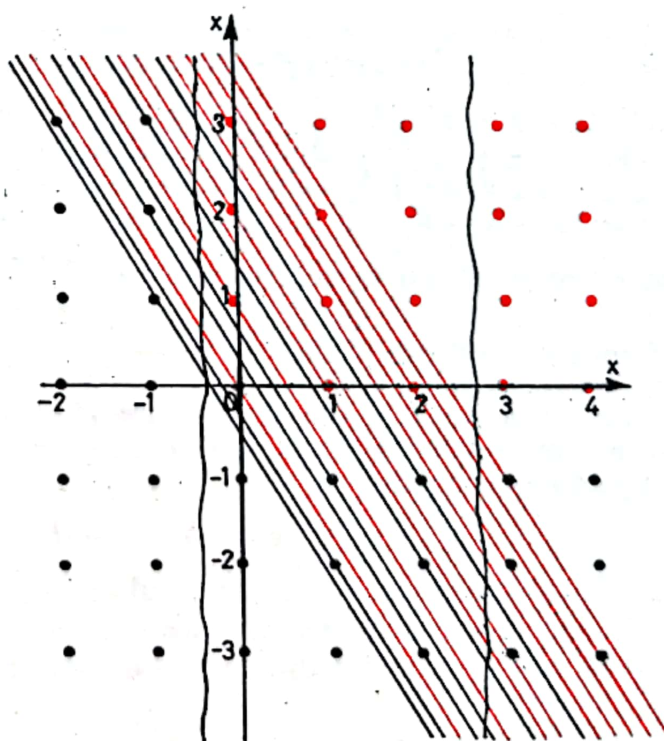


Fig. 325

Vom demonstra că pe fiecare dreaptă d_n, punctele întregi se întîlnesc după intervale egale.

Lema 1. Dacă (x_0, y_0) este un punct întreg pe dreapta d_n, atunci cele mai apropiate puncte întregi de pe dreapta d_n vor fi $(x_0 - b, y_0 + a)$ şi $(x_0 + b, y_0 - a)$ (a şi b sînt prime între ele).

Să considerăm dreapta d_0 care trece prin punctul $(0, 0)$. Fie $(-b_1, a_1)$ cel mai apropiat punct întreg de $(0, 0)$ de pe dreapta d_0 astfel încît $b_1 > 0$ $a_1 > 0$ (încă nu ştim că $b_1 = b$ şi $a_1 = a$) şi (x_0, y_0) un punct întreg al dreptei d_n. Printr-o translaţie de vector (x_0, y_0) segmentul dreptei d_0 de la $(0, 0)$ la $(-b_1, a_1)$ trece în segmentul dreptei d_n de la (x_0, y_0) la $(x_0 - b_1, y_0 + a_1)$. Astfel, punctul $(x_0 - b_1, y_0 + a_1)$ va fi cel mai apropiat punct de (x_0, y_0) al dreptei d_n, în sus. În mod analog, printr-o translaţie de vector $(x_0 + b_1, y_0 - a_1)$ acelaşi segment al dreptei d_0 trece în segmentul dreptei d_n de la $(x_0 + b_1, y_0 - a_1)$ la (x_0, y_0). Prin urmare şi pe acest segment punctele întregi vor fi numai extremităţile sale.

De aici rezultă că dacă pe o dreaptă oarecare d_n există cel puţin un punct întreg atunci distanţa dintre două puncte întregi este aceeaşi: a_1 unităţi pe axa Oy şi b_1 unităţi pe Ox. Aceasta, în particular se referă şi la dreapta d_0. Întrucît $(-b, a)$ aparţine lui d_0, rezultă că $b = tb_1$ şi $a = ta_1$ unde t este un număr întreg oarecare. Dar numerele a şi b, din ipoteza problemei sînt prime între ele. Rezultă că $t = 1$, adică $a = a_1$ şi $b = b_1$. Lema 1 este demonstrată.

Din această lemă rezultă că fiecare dreaptă d_n, unde n este întreg, trece exact printr-un singur punct din interiorul benzii $0 \leqslant x \leqslant b - 1$. În această situaţie (vezi fig. 325) este evident că dacă dreapta este roşie, adică trece undeva printr-un punct roşu, atunci punctul întreg din banda menţionată este tot roşu (şi punctul din bandă al unei drepte negre este tot negru).

Să observăm acum că prin simetria faţă de punctul $\left(\frac{b-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$:

$$(x, y) \to (x', y') = (b - 1 - x, -1 - y)$$

banda $0 \leqslant x \leqslant b - 1$ se transformă în ea însăşi, iar punctele roşii trec în puncte negre şi invers. După această simetrie, dreapta d_n trece în dreapta $d_{ab-a-b-n}$; dacă $ax + by = n$, atunci $ax' + by' = a(b - 1 - x) + b(-1 - y) = ab - a - b - n$ (Se poate ca prin centrul de simetrie nici una dintre drepte să nu treacă, pentru că $a\left(\frac{b-1}{2}\right) + b\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{ab-a-b}{2}$; în figură centrul este punctul $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.

Este clar că cea mai de jos dreaptă roşie este d_0. Prin urmare, cea mai de sus dreaptă neagră este d_{ab-a-b}. Astfel, cel mai mare număr care nu aparţine mulţimii este

$$c = ab - a - b$$

şi dintre două numere n şi $c - n$ unul aparţine lui M şi altul nu.

Ne-am folosit de faptul că orice număr întreg n poate fi scris sub forma $ax + by$ unde x şi y sînt întregi. Acest lucru se poate demonstra uşor tot cu ajutorul „reţelei".

Lema 2. Pe fiecare dreaptă d_n, unde n este un număr întreg, se găseşte cel puţin un punct întreg.

Este suficient să se demonstreze că punctul întreg (x_0, y_0) se găsește pe dreapta d_1: dacă $ax_0 + by_0 = 1$, atunci $a(nx_0) + b(ny_0) = n$ așa că (nx_0, ny_0) va aparține dreptei d_n.

Să considerăm paralelogramul cu vîrfurile în $(0, 0)$; $(0, 1)$; $(b, 1 - a)$; $(b, -a)$ care are laturile mai mici de lungime 1, iar laturile mai mari sînt situate pe dreptele d_0 și d_b. În interiorul acestui paralelogram (nu în vîrfuri) sînt $b - 1$ puncte întregi: pe fiecare dreaptă $x = 1$, $x = 2$, ..., $x = b - 1$ cîte unul. Pe de altă parte, acest paralelogram intersectează de același număr de ori $(b - 1)$ dreptele $d_1, d_2, ..., d_{b-1}$ (fără d_0 și d_b). Întrucît, o dreaptă d_n nu poate avea mai mult de un singur punct întreg care să aibă abscisa într-un segment de pe axa Ox de lungime mai mică decît b, rezultă că toate punctele în număr de $b - 1$ sînt situate cîte unul pe fiecare dreaptă. În particular există un punct întreg și pe dreapta d_1. Lema 2 este demonstrată.

N.B. Vasiliev

M 195. *Se dă triunghiul ABC. Cîte puncte D există astfel încît perimetrele patrulaterelor ADBC, ABDC și ABCD să fie egale?*

M.L. Gherver

Rezolvare. Vom construi trei cercuri (α, β și γ) cu centrele în punctele A, B și C care sînt două cîte două tangente exterioare (fig. 326). Razele acestor cercuri a, b și c se determină din sistemul de ecuații

$$a + b = AB,\ a + c = AC,\ b + c = BC.$$

Astfel

$$a = p - BC,\ b = p - AC,\ c = p - AB \qquad (1)$$

unde p este semiperimetrul triunghiului ABC.

Fie D centrul cercului δ care este tangent exterior la cercurile α, β și γ. Raza lui δ o vom nota prin d.

Faptul că acest cerc există îl presupunem cunoscut. Construcția acestui cerc reprezintă conținutul uneia dintre celebrele probleme ale lui Apollonius din Perga (sec. III î.e.n.).

Din figura 326 rezultă direct că fiecare dintre cele trei patrulatere $ADBC$, $ABDC$ și $ABCD$ are perimetrul $2(p + d) = 2(a + b + c + d)$. Astfel, cel puțin un punct D există.

Se poate să existe mai multe puncte? Trecînd la rezolvarea acestei probleme, înainte de toate să ne convingem că dacă perimetrele patrulaterelor $ADBC$, $ABDC$ și $ABCD$ sînt egale, atunci punctul D este situat în afara cercurilor α, β și γ și este egal depărtat de ele. Să punem $AD = x$, $BD = y$, $CD = z$. Atunci egalitatea perimetrelor patrulaterelor considerate se scrie astfel:

$$\begin{aligned} &2p - AB + x + y = \\ &= 2p - AC + x + z = \\ &= 2p - BC + y + z \end{aligned} \qquad (2)$$

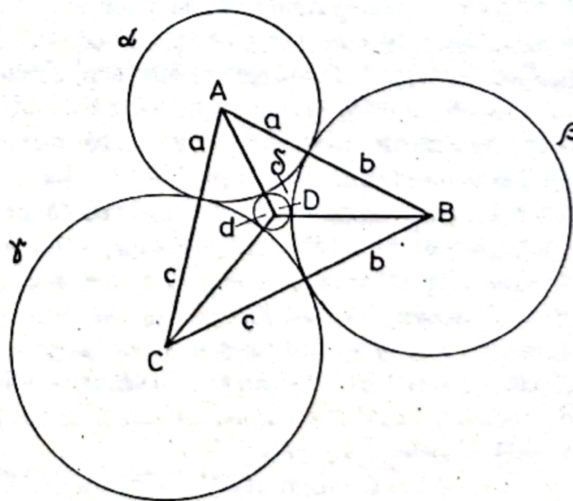


Fig. 326

Scăzînd termen cu termen egalitățile (2) din numărul $p + x + y + z$, vom obține:

$$z - (p - AB) = y - (p - AC) = x - (p - BC).$$

Folosind formulele (1), vom găsi

$$z - c = y - b = x - a.$$

Conform cu (3), numerele $x - a$, $y - b$, $z - c$ au același semn și anume $x - a > 0$ dacă punctul D este situat în exteriorul lui α și $x - a \leqslant 0$ dacă D este situat în interior sau pe α; semnele lui $y - b$ și $z - c$ au semnificații analoage. Fiindcă nici un punct nu aparține deodată tuturor celor trei cercuri, cazul

$$x - a = y - b = z - c \leqslant 0$$

se exclude. Rezultă că

$$x - a = y - b = z - c > 0$$

adică D este situat în exteriorul cercurilor și este egal depărtat de ele.

Bazîndu-ne pe acest lucru să demonstrăm unicitatea lui D. Fie, ca să precizăm, α cel mai mic dintre cercurile α, β, și γ; $a \leqslant b$, $a \leqslant c$. Cu razele $b - a$ și $c - a$ descriem cercurile β' și γ' cu centrele în punctele B și C. Punctul D situat în afara cercurilor α, β și γ și egal depărtat de ele este de asemenea egal depărtat de punctul A și de cercurile β' și γ' (fig. 327). Vom construi încă trei cercuri (α'', β'' și γ'') cu centrele în punctele A, B și C și cu razele AD, BD și CD. Fie T un punct oarecare situat în interiorul lui α'' sau pe α'', diferit de D. Atunci (fig. 327) T este situat sau în exteriorul lui β'' sau în exteriorul lui γ'' sau în exteriorul ambelor cercuri. Astfel T este mai apropiat de A decît de unul dintre cercurile β' sau γ'. Ultimul raționament arată că două puncte diferite D_1 și D_2 nu pot să fie egal depărtate de A, β' și γ'; presupunînd contrarul (fie D_1 și D_2 aceste puncte și $AD_1 \geqslant AD_2$) și notînd pe D_1 prin D și pe D_2 prin T ajungem, conform celor de mai sus, la o contradicție. Unicitatea lui D este demonstrată.

Problema duală. Mai sus s-a pus în evidență strînsa legătură care există între problema dată cu cele trei patrulatere și problema lui Apollonius. În formularea acesteia („Să se construiască un cerc tangent la trei cercuri date") nu s-a indicat în ce mod trebuie să fie tangent exterior sau interior. Mai sus, cercul δ era tangent la cercurile α, β și γ în mod exterior. Să notăm prin ε cercul care este tangent la α, β, γ și le cuprinde pe acestea: vom nota centrul său prin E (fig. 328). Ne punem întrebarea: nu este punctul E soluția unei probleme asemănătoare cu problema celor trei patrulatere? (Înainte de a citi mai departe, încercați să vă gîndiți singuri la această problemă.)

Să punem $AE = x$, $BE = y$, $CE = z$ iar raza cercului ε să o notăm prin e. Atunci (fig. 328) $x + a = y + b = z + c = e$. De aici rezultă că $x + y + a + b = 2e$, adică $x + y + AB = 2e$. La fel se stabilește că $x + z + AC = y + z + BC = 2e$. Mărimile $x + y + AB$, $x + z + AC$ și $y + z + BC$ reprezintă perimetrele triunghiurilor AEB, AEC și BEC. Astfel, centrul E al cercului ε este soluția problemei „cu trei triunghiuri de perimetre egale" complet analoagă cu problema inițială cu trei patrulatere. Formularea exactă a problemei este:

Se dă un triunghi ABC. Cîte puncte E există astfel încît perimetrele triunghiurilor AEB, AEC și BEC să fie egale? (ca și mai sus se consideră numai puncte din planul triunghiului ABC),

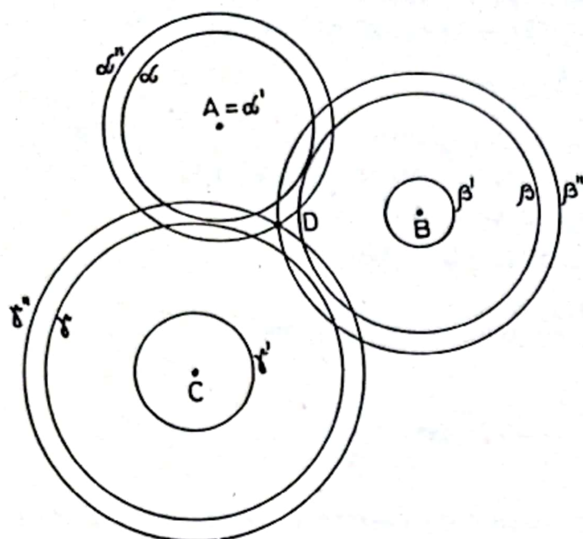


Fig. 327

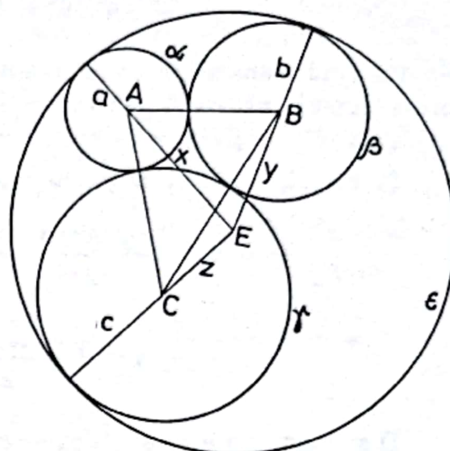


Fig. 328

Mai sus am stabilit că cel puţin un astfel de punct E există.

În problemele despre trei patrulatere şi trei triunghiuri de mai sus, am demonstrat nu numai existenţa şi unicitatea punctelor D şi E ci am găsit şi formulele pentru perimetre: $2(p+d) = 2(a+b+c+d)$ şi $2e$. Ne întrebăm: putem calcula aceste perimetre ştiind laturile triunghiului ABC? Razele a, b şi c se calculează cu formulele simple (1). Se pot exprima d şi e cu ajutorul lui a, b şi c? Răspunsul pozitiv la această chestiune este dat de formula lui Frederic Soddi (chimist nu matematician!)

Să notăm prin k, l, m şi n inversele mărimilor razelor cercurilor α, β, γ şi δ: $k = 1/a$, $l = 1/b$, $m = 1/c$, $n = 1/d$.
Atunci

$$2(k^2 + l^2 + m^2 + n^2) = (k + l + m + n)^2.$$

Această relaţie elegantă este formula lui Soddi. Ea poate fi considerată ca o ecuaţie de gradul al doilea relativ la n. Rezolvînd această ecuaţie se obţine

$$n_{1,2} = k + l + m \pm 2\sqrt{kl + lm + mk}$$

Rădăcina pozitivă n_1 va fi desigur $1/d$. Dar cine va fi n_2? Se arată că $n_2 = -1/e$ unde e este raza cercului din problema duală.

Care este sensul semnelor „plus" şi „minus" din formulele de mai sus?

Mărimea inversă razei unui cerc are o denumire specială; se numeşte „curbură". Cu cît este mai mare raza unui cerc cu atît el „se îndoaie" mai puţin deci cu atît curbura sa este mai mică. O dreaptă considerată ca un caz limită a unui cerc („cercul de rază infinită") are curbura nulă. Prin semne este natural să distingem curburile curbelor convexe de cele concave. Dar ce ar fi nişte cercuri convexe sau concave? Toate cercurile, desigur, sînt „identice". Dar atunci cînd ne găsim în exteriorul unui cerc este natural să-l considerăm convex iar dacă ne găsim în interiorul aceluiaşi cerc, atunci ni-l reprezentăm ca concav. Astfel „din punct de vedere al cercurilor α, β şi γ" cercurile δ şi ε este natural să le considerăm „diferite", primul convex iar al doilea concav.

Deducerea formulei lui Soddi.

1. Fie U, V şi W trei numere arbitrare nenegative a căror sumă este egală cu π. Atunci

$$\sin^2 U = \sin^2 V + \sin^2 W - 2 \sin V \sin W \cos U.$$

D e m o n s t r a ţ i e. Construim triunghiul cu unghiurile U, V şi W. Fie lungimile laturilor opuse corespunzătoare u, v şi w. După teorema cosinusului avem

$$u^2 = v^2 + w^2 - 2vw \cos U.$$

Din teorema sinusurilor avem $u/\sin U = v/\sin V = w/\sin W$. De aici prin înlocuire se obţine formula necesară pentru orice valori U, V, W nenule. Dacă cel puţin unul dintre unghiurile U, V şi W este nul atunci formula se verifică direct.

2. Fie A, B, C şi D patru puncte arbitrare în plan. Atunci

$$\left(\sin^2 \frac{\sphericalangle ADB}{2} + \sin^2 \frac{\sphericalangle ADC}{2} - \sin^2 \frac{\sphericalangle BDC}{2}\right)^2 =$$

$$= 4 \sin^2 \frac{\sphericalangle ADB}{2} \sin^2 \frac{\sphericalangle ADC}{2} \cdot \cos^2 \frac{\sphericalangle BDC}{2}$$

D e m o n s t r a ţ i e. Sînt posibile patru cazuri de aşezare a celor patru puncte (vezi fig. 329). În fiecare dintre ele vom lua pe U, V şi W aşa cum este indicat în tabelul de mai jos. În oricare caz, $U \geqslant 0$, $V \geqslant 0$, $W \geqslant 0$ şi $U + V + W = \pi$, aşa că, conform cu punctul 1:

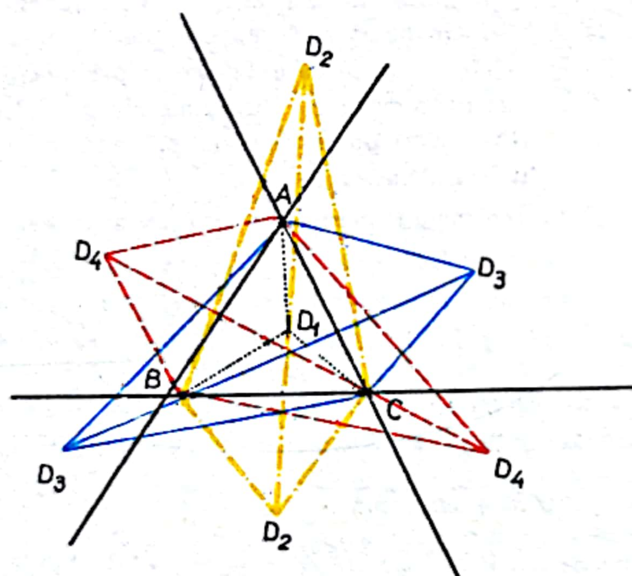


Fig. 329

$$(\sin^2 V + \sin^2 W - \sin^2 U)^2 =$$
$$= 4 \sin^2 V \cdot \sin^2 W \cdot \cos^2 U$$

Rămîne să se verifice că în fiecare caz

$$\sin U = \sin \frac{\sphericalangle BDC}{2}$$

$$\sin V = \sin \frac{\sphericalangle ADC}{2}$$

$$\sin W = \sin \frac{\sphericalangle ADB}{2}$$

$$\cos^2 U = \cos^2 \frac{\sphericalangle BDC}{2}$$

Nr.	Dacă	Atunci
1	$\sphericalangle BDC + \sphericalangle ADC + \sphericalangle ADB = 2\pi$	$U = \frac{\sphericalangle BDC}{2}$, $V = \frac{\sphericalangle ADC}{2}$, $W = \frac{\sphericalangle ADB}{2}$
2	$\sphericalangle BDC = \sphericalangle ADC + \sphericalangle ADB$	$U = \pi - \frac{\sphericalangle BCD}{2}$, $V = \frac{\sphericalangle ADC}{2}$, $W = \frac{\sphericalangle ADB}{2}$
3	$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC$	$U = \frac{\sphericalangle BDC}{2}$ $V = \pi - \frac{\sphericalangle ADC}{2}$ $W = \frac{\sphericalangle ADB}{2}$
4	$\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC + \sphericalangle ADC$	$U = \frac{\sphericalangle BDC}{2}$ $V = \frac{\sphericalangle ADC}{2}$ $W = \pi - \frac{\sphericalangle ADB}{2}$

3. Fie unul dintre unghiurile triunghiului egal cu θ, latura opusă lui u, cele alăturate v şi w, iar semiperimetrul triunghiului q. Atunci

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{q(q-u)}{v\cdot w},\ \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{(q-v)(q-w)}{v\cdot w}.$$

Demonstraţie. După teorema cosinusului

$$u^2=v^2+w^2-2vw\cos\theta,\ \cos\theta=(v^2+w^2-u^2)/2vw.$$

Rezultă,

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{(v+w)^2-u^2}{4v\cdot w}=\frac{(v+w+u)(v+w-u)}{4v\cdot w}=\frac{q(q-u)}{v\cdot w},$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{u^2-(v-w)^2}{4v\cdot w}=\frac{(u+v-w)(u+w-v)}{4v\cdot w}=$$

$$=\frac{(q-w)(q-v)}{v\cdot w}.$$

4. Să presupunem că cercurile α, β, γ şi δ cu centrele în punctele A, B C şi D şi de raze a, b, c şi d sînt tangente două cîte două exterior.
Atunci

$$\cos^2\frac{\sphericalangle BDC}{2}=\frac{(b+d+c)d}{(b+d)(d+c)},\ \sin^2\frac{\sphericalangle BDC}{2}=\frac{bc}{(b+d)(d+c)},$$

$$\sin^2\frac{\sphericalangle ADB}{2}=\frac{ab}{(a+d)(d+b)},\ \sin^2\frac{\sphericalangle ADC}{2}=\frac{ac}{(a+d)(d+c)}.$$

Demonstraţie. În triunghiul BDC exprimăm laturile şi semiperimetrul cu ajutorul lui b, c şi d:

$$BC=b+c,\ BD=b+d,\ DC=d+c,\ \frac{1}{2}(BC+BD+DC)=b+d+c$$

şi vom folosi formulele de la punctul 3. Celelalte două formule le vom obţine în mod analog din triunghiurile ADB şi ADC.

4'. Fie cercurile α, β, γ cu centrele în punctele A, B, C şi cu razele a, b, c două cîte două tangente în mod exterior, toate trei tangente interior la cercul ε cu centrul în E şi de rază 0. Atunci:

$$\cos^2\frac{\sphericalangle BEC}{2}=\frac{(b-e+c)(-e)}{(b-e)(-e+c)},\ \sin^2\frac{\sphericalangle BEC}{2}=\frac{bc}{(b-e)(-e+c)}$$

$$\sin^2\frac{\sphericalangle AEB}{2}=\frac{ab}{(a-e)(-e+b)},\ \sin^2\frac{\sphericalangle AEC}{2}=\frac{ac}{(a-e)(-e+c)}.$$

Demonstraţia se face la fel ca cea de la punctul 4.

5. În condiţiile de la punctul 4 să punem: $k=1/a$, $l=1/b$, $m=1/c$, $n=1/d$. Atunci

$$(-k+l+m+n)^2=4(lm+mn+nl).$$

Demonstraţie. Conform punctelor 2 şi 4

$$\left[\frac{ab}{(a+d)(b+d)}+\frac{ac}{(a+d)(d+c)}-\frac{bc}{(b+d)(d+c)}\right]^2=$$

$$=4\frac{ab}{(a+d)(d+b)}\cdot\frac{ac}{(a+d)(d+c)}\cdot\frac{(b+d+c)d}{(b+d)(d+c)}.$$

înmulţind ambii termeni ai egalităţii cu $[(a+d)(b+d)(c+d)/abcd]^2$, vom obţine

$$\left[\frac{c+d}{cd}+\frac{b+d}{bd}-\frac{a+d}{ad}\right]^2=4\frac{b+d+c}{bdc}$$

sau

$$(-k+l+m+n)^2=4(lm+mn+nl)$$

Observaţie. Formulele punctului 4′ se obţin din formulele punctului 4 dacă se înlocuieşte d prin $-e$. De aceea formula demonstrată la punctul 5 rămîne valabilă şi în condiţiile punctului 4′ dacă $n=-1/e$.

6. Curburile k, l, m, n ale cercurilor α, β, γ, δ două cîte două tangente exterioare, sînt legate prin formula lui Soddi

$$(k+l+m+n)^2=2(k^2+l^2+m^2+n^2)$$

Aceeaşi formulă rămîne valabilă dacă n este curbura cercului ε la care α, β, γ sînt tangente interioare.

Demonstraţie. Transformăm identitatea

$$(k+l+m+n)^2=(-k+l+m+n)^2+4k(l+m+n)$$

ţinînd cont de punctul 5:

$$(k+l+m+n)^2-4(kl+km+kn+lm+ln+mn).$$

Folosind identitatea

$$(k+l+m+n)^2-(k^2+l^2+m^2+n^2)=2(kl+km+kn+lm+ln+mn)$$

obţinem

$$(k+l+m+n)^2=2[(k+l+m+n)^2-(k^2+l^2+m^2+n^2)].$$

Reducînd termenii asemenea, obţinem formula lui Soddi.

Dacă revenim acum la „rezolvarea" problemei iniţiale (şi a celei duale) trebuie să facem observaţia că în cursul demonstraţiilor ne-am bazat pe nişte fapte „evidente" dar care... nu sînt adevărate.

1. Fie trei cercuri α, β şi γ două cîte două tangente exterioare. Atunci există un singur cerc δ tangent exterior la α, β şi γ şi un singur cerc ε la care α, β şi γ sînt tangente interioare.

2. Fie trei cercuri α'', β'' şi γ'' care trec prin acelaşi punct D. Atunci orice punct T situat în interiorul lui α'', este situat sau în exteriorul lui β'', sau în exteriorul lui γ'' (sau în exteriorul ambelor cercuri).

În fig. 330 sînt desenate trei cercuri, α, β, şi γ pentru care există două cercuri (δ_1 şi δ_2) care sînt tangente exterioare la α, β şi γ şi pentru care nu există nici un cerc ε care să cuprindă cercurile α, β şi γ cu care să fie tangente. Figura 331 răstoarnă şi afirmaţia 2.
Rezultă că nu sînt valabile nici consecinţele acestor două „afirmaţii" şi ca atare toată rezolvarea trebuie revizuită. Acest lucru îl facem folosind următoarea teoremă.

Teoremă. Fie date cercurile α, β şi γ două cîte două tangente exterioare. Atunci sînt posibile trei (şi numai trei) cazuri:
I. Există un singur cerc δ care este tangent exterior la cele trei cercuri date şi există un singur cerc ε la care cercurile α, β şi γ sînt tangente interioare.
II. α, β şi γ admit o tangentă comună (şi sînt situate de aceeaşi parte a sa) şi în acest caz există un singur cerc δ tangent exterior la α, β şi γ şi nu există nici un cerc la care α, β şi γ să fie tangente interioare.

III. Există două cercuri δ_1 şi δ_2 care sînt tangente exterioare la cercurile α, β şi γ şi nu există nici un cerc la care α, β şi γ să fie tangente interioare. **Demonstraţia teoremei o vom face folosind transformarea numită inversiune.**

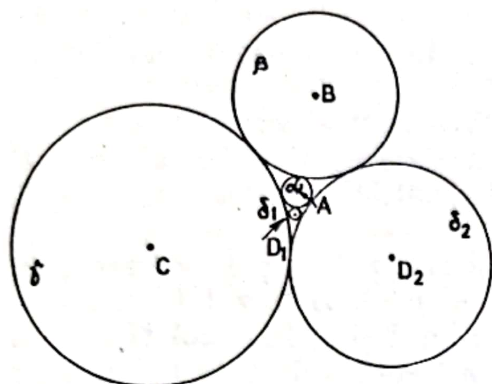


Fig. 330

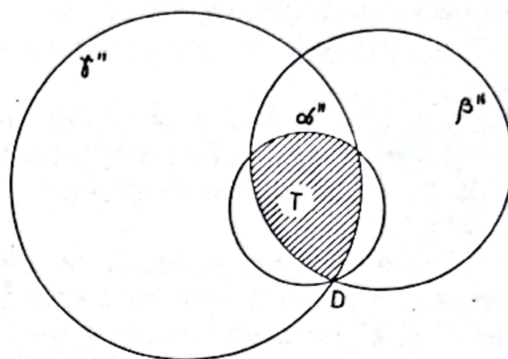


Fig. 331

Reamintim definiţia şi cîteva proprietăţi ale inversiunii.

Definiţie. Fie Q un cerc de centru O şi de rază R, situat în planul π. Se numeşte inversiune în raport cu cercul Q, următoarea transformare a planului π: fiecărui punct M al planului situat la distanţa r de O îi corespunde un punct M' situat pe semidreapta OM la distanţa r' de O astfel încît $rr' = R^2$; O se numeşte centrul inversiunii, R^2 se numeşte coeficientul de inversiune.

Proprietăţi. **1.** Dacă M aparţine cercului Q atunci $M' = M$; dacă M se găseşte în interiorul lui Q şi e diferit de O, atunci M' se găseşte în exteriorul lui Q; dacă M este în exteriorul lui Q atunci M' este situat în interiorul lui Q.

2. Dreptele şi cercurile trec prin inversiune în drepte şi cercuri şi anume:

a) punctele situate pe o dreaptă care trece prin O, se transformă în puncte situate pe aceeaşi dreaptă;

b) o dreaptă care nu trece prin O, se transformă într-un cerc care trece prin O;

c) un cerc care trece prin O, se transformă într-o dreaptă care nu trece prin O;

d) un cerc care nu trece prin O se transformă într-un cerc care nu trece prin O; în acest caz, O se găseşte sau în exteriorul ambelor cercuri sau în interiorul ambelor cercuri.

Demonstraţia teoremei. Cercurile α, β şi γ, după ipoteză sînt tangente două cîte două în mod exterior (fig. 333, a). Notăm punctul de tangenţă dintre α şi β prin O. Vom lua un cerc Q cu centrul în O şi aplicăm o inversiune faţă de acest cerc (fig. 332).

Prin inversiune, cercurile α şi β se transformă în dreptele α' şi β' iar cercul γ într-un cerc γ' tangent la aceste drepte (fig. 333, b). Centrul inversi-

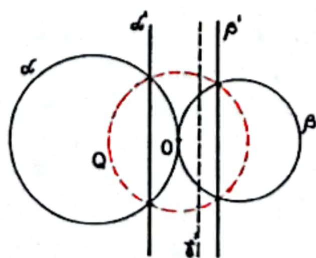


Fig. 332

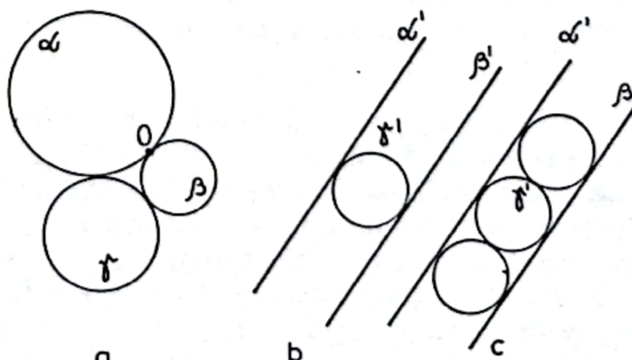


Fig. 333

unii O este situat (verificaţi aceasta!) în banda dintre dreptele α' şi β' în afara cercului γ'.

Există în mod evident exact două cercuri care sînt tangente şi la α' şi la β' şi la γ' (fig. 333, c). În acest caz sînt posibile trei cazuri.

I. Punctul O este situat în interiorul unuia dintre aceste cercuri (şi în afara celuilalt).

II. Punctul O este situat pe unul dintre aceste cercuri (şi în afara celuilalt).

III. Punctul O este situat în afara ambelor acestor cercuri.

În cazurile I şi II să notăm cercurile considerate prin δ' şi ε' (prin δ' acela în afara căruia se găseşte punctul O), în cazul III să le notăm prin δ_1' şi δ_2'.

Orice cerc sau dreaptă care este tangent şi la α şi la β şi la γ trece prin inversiune într-un cerc care este tangent la α', β' şi γ'. În cazul I, în cercurile δ' şi ε' au trecut cercuri, pe care să le numim δ şi ε. În cazul II în δ' a trecut un cerc, pe care să-l numim δ, iar în ε' a trecut o dreaptă (adică α, β şi γ admit în acest caz o tangentă comună şi α, β şi γ sînt situate de aceeaşi parte a ei). În cazul III în δ_1' şi δ_2' au trecut cercuri (să le numim δ_1 şi δ_2).

Astfel cercuri tangente şi la α şi la β şi la γ, sînt sau două sau unul. În cazul I, punctul O este situat în exteriorul lui δ şi în interiorul lui ε, adică δ este tangent exterior cu α, β, γ iar acestea sînt tangente interioare la ε. În cazul II, punctul O este situat în exteriorul lui δ — din nou δ este tangent exterior cu α, β, γ. În cazul III punctul este situat şi în exteriorul lui δ_1 şi în exteriorul lui δ_2 aşa că ambele sînt tangente exterioare la α, β, γ. Teorema este demonstrată.

C o n s e c i n ţ a I. În cazurile I şi II problema cu trei patrulatere are o soluţie unică (centrul D al cercului δ), în cazul III, două soluţii (centrele D_1 şi D_2 ale cercurilor δ_1 şi δ_2).

C o n s e c i n ţ a II. În cazul I problema cu cele trei triunghiuri are o singură soluţie (centrul E al cercului ε), în cazurile II şi III nu are soluţie.

Observaţie. Cele afirmate la „rezolvarea“ dată iniţial, privitor la $n_1 = 1/d$ şi $n_2 = -1/e$ se referă la cazul I. În acest caz $n_2 < 0$. În cazul II, $n_2=0$ (adică dreapta tangentă la α, β, γ are curbura nulă). În cazul III, $n_1 = 1/d_1$ şi $n_2 = 1/d_2$, unde d_1 şi d_2 sînt razele cercurilor δ_1 şi δ_2; în acest caz $n_2 > 0$. Ştiind laturile triunghiului ABC, putem calcula $n_{1,2}$ şi să stabilim în care caz sîntem. Acest lucru poate fi făcut şi fără atîtea calcule, aşa cum vom arăta la rezolvarea problemei M 209.

M.L. Gherver

M 196. *Într-un cerc de rază 1 se duc mai multe coarde. Să se demonstreze că dacă fiecare diametru intersectează cel mult k coarde, atunci suma lungimilor coardelor este mai mică decît πk.*

A.T. Kolotov

Să presupunem că suma lungimilor coardelor nu este mai mică decît πk. Atunci suma arcelor (celor mai mici) subîntinse de aceste coarde este mai mare decît π. Adăugăm la aceste arce şi arcele simetrice cu acestea faţă de centrul cercului. Suma lungimii tuturor arcelor este mai mare decît $2\pi k$. De aceea, se va găsi un punct de pe cerc acoperit de cel puţin $k+1$ arce (lungimea cercului este 2π). Dacă vom duce diametrul prin acest punct el va intersecta cel puţin $k+1$ coarde ceea ce contrazice ipoteza.

A T. Kolotov

M. 197. *Într-un tablou dreptunghiular cu m linii și n coloane sînt scrise mn numere arbitrare pozitive. Efectuăm produsul numerelor din fiecare coloană și apoi suma S a tuturor celor n produse. Să se demonstreze că dacă așezăm numerele de pe fiecare linie în ordine crescătoare, suma S pentru noul tablou nu va fi mai mică decît în cel inițial (În figura 334 este dat un exemplu din situația descrisă în problemă; aici m = 3, n = 4.)*

Să se rezolve această problemă:

a) pentru m = n = 2 (pentru tabloul 2 × 2);

b) pentru m = 2 și n arbitrar (pentru un tablou format din două linii);

c) pentru orice numere naturale m și n.

1	5	6	2
4	3	7	2
1	2	1	2
4	30	42	8

S = 84

1	2	5	6
2	3	4	6
1	1	2	2
2	6	40	84

S = 132

Fig. 334

Vom examina direct cazul general, un tablou cu m linii și n coloane. Vom demonstra că prin ordonarea liniilor, suma produselor nu se va micșora. Demonstrația o vom face prin inducție după numărul de coloane ale tabloului. Dacă tabloul are o coloană, atunci afirmația problemei este adevărată. Presupunem că pentru tablourile cu $n-1$ coloane afirmația problemei este adevărată. O vom demonstra pentru tablourile formate din n coloane.

Să notăm prin π_i produsul numerelor din coloana i. Aranjăm acum coloanele astfel încît produsul π_1 să fie minim (aceasta nu schimbă suma produselor). Vom nota prin x_{ij} numărul din coloana j și linia i. Presupunem că x_{i1} nu este numărul minim din linia i și că numărul minim este x_{ik}. Să schimbăm locurile lui x_{i1} și x_{ik} și să verificăm că suma produselor în acest caz va crește. Vom nota prin $\tilde{\pi}_1$ produsul tuturor numerelor din prima coloană în afară de x_{i1}, prin $\tilde{\pi}_k$ produsul tuturor numerelor din coloana k, în afară de x_{ik}. Diferența dintre suma veche și suma nouă este egală cu

$$x_{i1}\tilde{\pi}_k + x_{ik}\tilde{\pi}_1 - x_{i1}\tilde{\pi}_1 - x_{ik}\tilde{\pi}_k = (x_{i1} - x_{ik})(\tilde{\pi}_k - \tilde{\pi}_1).$$

Dar această mărime este pozitivă, pentru că $x_{i1} > x_{ik}$ și $\pi_k > \pi_1$ întrucît $x_{ik}\tilde{\pi}_k > x_{i1}\tilde{\pi}_1$. Rezultă că după schimbarea numerelor, suma se mărește. În afară de aceasta, este evident că produsul π_1 al noilor numere din prima coloană, ca și mai înainte, este minim. Deci dacă un anumit număr x_{i1} nu este minimal în linia sa, putem să schimbăm locul său cu cel al numărului minimal și în acest fel suma se mărește. Astfel putem ca toate numerele minimale de pe linii să le considerăm în prima coloană și suma produselor să se mărească.

Vom folosi acum presupunerea de inducţie. Evident că dacă ordonăm liniile într-un tablou format din coloanele de la a 2-a la a $n-2$, vom obţine tabloul iniţial cu liniile ordonate. Cu presupunerea de inductiv putem afirma că suma produselor $\pi_2 + \dots + \pi_n$ nu se micşorează. Prin urmare, suma $\pi_1 + + \dots + \pi_n$ din primul tablou nu e mai mare decît suma analoagă din tabloul cu liniile ordonate. Rezolvarea problemei este terminată.

Observaţii **1.** Remarcăm că prin schimbările locurilor numerelor suma produselor se măreşte strict. De aici rezultă că suma produselor este maximă atunci şi numai atunci cînd tabloul se obţine dintr-un tablou cu linii ordonate prin permutarea coloanelor.

2. Dacă nu se presupune că în tablou sînt numere pozitive, atunci afirmaţia nu e adevărată. Un exemplu simplu de tablou 2×3 este dat în figura 335.

B.M. Makarevici

−1	−2
−2	−1
−1	2
−2	4

S = 2

−2	−1
−2	−1
−1	2
−4	2

S = −2

Fig. 335

M 198. *Se dă paralelogramul ABCD. Pe dreptele AB şi BC se aleg punctele H respectiv K astfel încît triunghiurile KAB şi HCB să fie isoscele ($KA = AB$ şi $HC = CB$; fig. 336). Să se demonstreze că triunghiul KDH este de asemenea isoscel.*

V.L. Gutenmaher

Este o problemă foarte simplă. Considerăm triunghiurile AKD şi CDH. Ele sînt congruente, întrucît $AD = CH$, $AK = DC$ şi $\sphericalangle DAK = \sphericalangle DCH$ (vezi fig. 337, a, b şi c). De aceea segmentele KD şi DH au aceeaşi lungime. Se verifică uşor şi faptul că triunghiurile KDH, AKB şi BHC sînt asemenea (demonstraţi!).

V.L. Gutenmaher

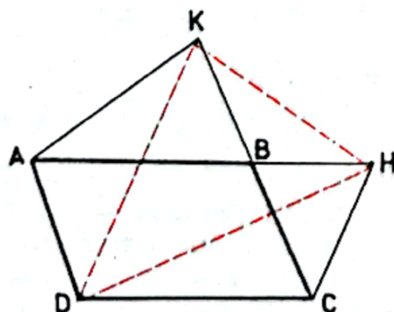
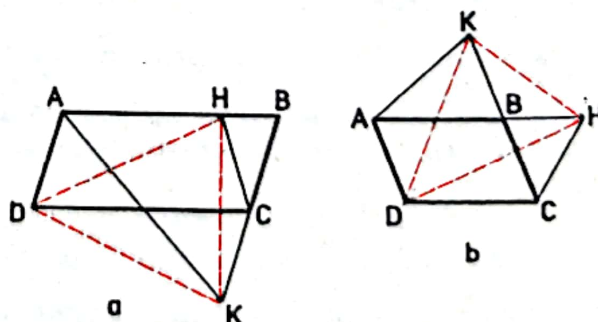


Fig. 336



A BKH
D C
c

Fig. 337

M 199. *a) Să se demonstreze că suma*

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 \frac{1}{4} + C_{n-2}^2 \frac{1}{4^2} - \ldots + (-1)^i C_{n-i}^i \frac{1}{4^i} + \ldots$$

$\left(\right.$*suma se ia după toţi întregii* i, $0 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2}\left.\right)$ *este egală cu* $\frac{n+1}{2^n}$.

b) Să se demonstreze că dacă p *şi* q *sînt două numere diferite şi* $p + q = 1$, *atunci suma*

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 pq + C_{n-2}^2 p^2q^2 - \ldots + (-1)^i C_{n-i}^i p^i q^i + \ldots$$

este egală cu

$$\frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$$

pentru orice n.

D.A. Fridkin

Punctul a) este un caz particular al punctului b). Într-adevăr, dacă înlocuim expresia $\frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$ prin $p^n + p^{n-1}q + \ldots + pq^{n-1} + q^n$ şi apoi înlocuim $p = q = \frac{1}{2}$, vom obţine $\frac{n+1}{2^n}$. De aceea vom rezolva direct punctul b).

Fie $C_n^0 - C_{n-1}^1 pq + \ldots = S_n$. Atunci

$$S_{n+1} - S_n = \Sigma(-1)^i (C_{n+1-i}^i - C_{n-i}^i) p^i q^i = \Sigma(-1)^i C_{n-i}^{i-1} p^i q^i =$$

$$= -pq\,\Sigma(-1)^{i-1} C_{n-1-(i-1)}^{i-1} p^{i-1} q^{i-1} = -pqS_{n-1}.$$

Astfel, $S_{n+1} = S_n - pqS_{n-1}$.

Vom folosi acum metoda inducţiei matematice. Presupunem că formula $S_n = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$ este demonstrată pentru orice $n \leqslant k$.

Atunci

$$S_{k+1} = S_k - pqS_{k-1} = \frac{p^{k+1} - q^{k+1} - pq(p^k - q^k)}{p - q} =$$

$$= \frac{p^{k+1}(1 - q) - q^{k+1}(1 - q)}{p - q} = \frac{p^{k+2} - q^{k+2}}{p - q}$$

(amintim că $p + q = 1$).

Rămîne să mai facem şi verificarea. Pentru $n = 0$, $S_n = 1$ şi $\frac{p - q}{p - q} = 1$ formula este adevărată. De asemenea pentru $n = 1$, $S_n = 1$ şi $\frac{p^2 - q^2}{p - q} = p + q = 1$.

Observaţie. În calcule am folosit formula $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. Demonstraţi această formulă.

L.G. Limanov

M 200. *Se dă un unghi cu vîrful în O şi un cerc tangent la laturile sale în punctele A şi B. Din punctul A, paralel cu OB se duce o semidreaptă care intersectează cercul în punctul C. Segmentul OC intersectează cercul în punctul E, iar dreptele AE şi OB se intersectează în punctul K. Să se demonstreze că* $OK = KB$.

E. V. Sallinen

Această problemă poate fi rezolvată în foarte multe feluri, folosind teoreme privind tangentele şi coardele, asemănarea triunghiurilor, unghiurile înscrise în cerc ş.a.m.d. Dăm mai jos una dintre cele mai scurte şi mai frumoase rezolvări.

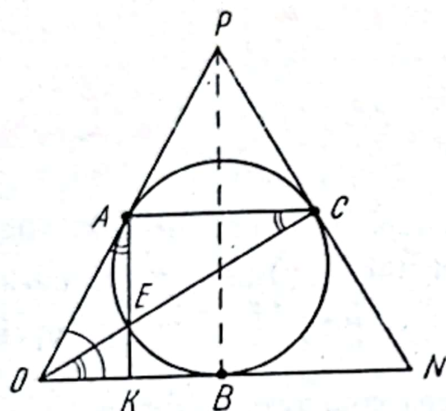


Fig. 338.

Ducem tangenta la cerc în punctul C: fie P şi N punctele sale de intersecţie cu laturile AO şi OB ale unghiului AOB (fig. 338). Este evident că PB este axa de simetrie a triunghiului OPN, de aceea toate cele patru tangente sînt congruente

$$OA = OB = BN = CN.$$

Triunghiurile NOC şi OAK sînt asemenea, întrucît $\sphericalangle CNO = \sphericalangle AOK$, $\sphericalangle NOC = \sphericalangle ACO = \sphericalangle OAK$ (fiecare dintre ultimele două unghiuri se măsoară prin semisuma măsurii arcului AE). De aici

$$\frac{OK}{OB} = \frac{OK}{OA} = \frac{CN}{ON} = \frac{1}{2}.$$

Nr. colilor de tipar: 17
Bun de tipar: 12.01.1983



Com. nr. 20 033/7121
Combinatul poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
Bucureşti — R.S.R.

Lei 32

Au apărut :

IOAN TOMESCU	**Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor**
S. RĂDULESCU M. RĂDULESCU	**Teoreme şi probleme de analiză matematică**
C. MIHU T. DĂNEŢ	**Probleme pentru aplicarea matematicii în practică**
C. NĂSTĂSESCU C. NIŢĂ M. BRANDIBURU D. JOIŢA	**Exerciţii şi probleme de algebră pentru clasele IX–XII**
S. IANUŞ L. NICULESCU M. ŢENA N. SOARE S. DRAGOMIR	**Probleme de geometrie şi de trigonometrie, clasele IX–X**

În curs de apariţie :

E. E. MOISE F. L. DOWNS, JR.	**Geometrie elementară, manualul elevului (traducere din limba engleză)**
M. M. POSTNIKOV	**Despre teorema lui Fermat (traducere din limba rusă)**

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ, BUCUREŞTI